

## FUNDAMENTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA Y COMPUTACIÓN

No está permitida la reproducción total o parcial de este libro, ni su tratamiento informático, ni la transmisión de ninguna forma o por cualquier medio, ya sea electrónico, mecánico, por fotocopia, por registro u otros métodos, sin el permiso y por escrito de los editores y autores.

© Joaquín Aranda Almansa, Natividad Duro Carralejo, José Luis Fernández Marrón, José Jiménez González, Fernando Morilla García.

© EDITORIAL SANZ Y TORRES, S. L.

Pinos Alta, 49 – 28029 Madrid

Teléf.: 902 400 415 – 913 145 599

[www.sanzyltorres.com](http://www.sanzyltorres.com)

[libreria@sanzyltorres.com](mailto:libreria@sanzyltorres.com)

[www.sanzyltorres.com/editorial](http://www.sanzyltorres.com/editorial)

[editorial@sanzyltorres.com](mailto:editorial@sanzyltorres.com)

ISBN: 84-96094-74-X

Depósito legal: M-15317-2006

Portada:

Iván Pérez López

Composición:

Los autores

Impresión:

Edigrafos, S. A. c/ Volta, 2, Pol. Ind. San Marcos, 28906 Getafe (Madrid)

Encuadernación:

Felipe Méndez, S. A. c/ Del Carbón, 6 y 8, Pol. Ind. San José de Valderas 2, 28918 Leganés (Madrid)

## ÍNDICE

Prólogo.	xi
<b>Capítulo I: Introducción y lógica de proposiciones.</b>	
I.1 Marco de referencia de la lógica matemática.	1
I.2 Antecedentes históricos de la lógica matemática.	4
I.3 Introducción a la lógica de proposiciones.	6
I.4 El lenguaje de la lógica de proposiciones.	9
I.4.1 Sintaxis.	9
I.4.1.1 Reglas de formación.	10
I.4.1.2 Conectivas.	11
I.4.2 Semántica.	13
I.4.2.1 Tablas de verdad.	14
I.4.2.2 Equivalencia.	18
I.4.2.3 Tautologías y contradicciones.	19
I.5 Validación de sentencias proposicionales.	21
I.5.1 Validación mediante tablas de verdad.	21
I.5.2 Validación mediante árboles semánticos.	23
I.5.3 Validación mediante refutación.	25
I.6 Leyes de la lógica de proposiciones.	27
I.7 Sistema axiomático del cálculo de proposiciones.	31
I.7.1 Alfabeto y reglas de formación del cálculo axiomático PM.	32
I.7.2 Axiomas y reglas de transformación.	34
I.8 Sistema inferencial del cálculo de proposiciones.	35
I.8.1 Reglas de inferencia.	40
I.8.2 El principio de resolución para la lógica de proposiciones.	44

*Fundamentos de Lógica Matemática y Computación*

I.8.2.1 Regla de resolución.	46
I.8.2.2 Refutación.	47
I.9 Ejemplos de aplicaciones de la lógica de proposiciones.	49
Capítulo II: Circuitos combinacionales	
II.1 Introducción a los circuitos combinacionales.	55
II.2 Puertas lógicas básicas.	56
II.3 Modelos matemáticos de los circuitos.	59
II.3.1 Formas booleanas.	59
II.3.2 Formas canónicas.	60
II.3.2.1 Primera forma canónica.	60
II.4 Simplificación de funciones booleanas mediante Karnaugh.	62
II.5 Segunda forma canónica.	68
II.5.1 Tercera y cuarta forma canónica.	71
Capítulo III: Lógica de predicados de primer orden	
III.1 Introducción.	73
III.2 El lenguaje de la lógica de predicados.	74
III.2.1 Predicados, fórmulas atómicas y sentencias.	74
III.2.2 Cuantificadores.	75
III.2.3 Funciones.	77
III.2.4 Símbolos.	78
III.2.5 Semántica.	78
III.3 Sistema axiomático en lógica de predicados.	82
III.4 Leyes en lógica de predicados.	83
III.5 Sistema inferencial del cálculo de predicados.	87
III.5.1 Reglas de inferencia.	88
III.6 Sistema de resolución.	91
III.6.1 Forma clausulada de la lógica de predicados.	91
III.6.2 Sustitución y unificación.	98
III.6.3 Expresión general de la regla de resolución.	103
III.6.4 Refutación	105
III.7 Estrategias para analizar la validez de proposiciones lógicas.	107
Capítulo IV: Otras lógicas.	
IV.1 Introducción.	109
IV.2 Lógica de predicados con identidad.	110
IV.3 Lógica de las clases.	118

46	IV.3.1 Álgebra booleana de las clases.	119
47	IV.3.2 Comprobación mediante diagramas de Euler.	122
49	IV.4 Lógica de las relaciones.	125
	IV.5 Lógicas polivalentes.	131
	IV.6 Lógica borrosa.	134
55	IV.6.1 Conjuntos borrosos.	135
56	IV.6.1.1 Conceptos básicos.	139
59	IV.6.1.2 Operaciones típicas.	141
59	IV.6.1.3 Relaciones borrosas.	145
60	IV.6.2 Diferencias entre la lógica borrosa y la lógica tradicional.	149
60	IV.6.3 Sentencias borrosas.	151
62	IV.6.3.1 Interpretación de sentencias simples.	152
68	IV.6.3.2 Interpretación de sentencias compuestas.	156
71	IV.6.3.3 Modificadores lingüísticos.	160
	 Capítulo V: Automatas.	
73	V.1 Introducción.	167
74	V.2 Definición y representación de los automatas.	168
74	V.2.1 Representaciones de un automata finito.	169
75	V.3 Conceptos básicos de álgebra relacionados con automatas.	172
77	V.4 Comportamiento de un automata.	173
78	V.4.1 Equivalencia entre una máquina de Mealy y una de Moore.	176
78	V.4.1.1 Transformaciones mutuas entre ambas máquinas.	178
82	V.5 Circuitos secuenciales.	180
83	V.5.1 Tipos de elementos en los circuitos secuenciales.	180
87	V.5.1.1 Elementos combinacionales.	180
88	V.5.1.2 Elementos con memoria.	180
91	V.5.2 Modelos básicos de los circuitos secuenciales.	181
91	V.5.3 Biestables.	183
98	V.5.4 Análisis de los circuitos secuenciales.	186
103	V.5.5 Formalización general de un circuito secuencial.	187
105	V.5.6 Síntesis de los circuitos secuenciales.	189
107	V.5.6 Resumen y ampliación de los biestables.	195
	V.6 Reconocedor finito.	200
	V.7 Conjuntos y expresiones regulares.	202
	V.8 Análisis y síntesis de un reconocedor finito.	206
109	V.8.1 El problema de síntesis y su solución.	208
110	V.9 Automata finito no determinista.	212
118	V.10 Automata probabilístico o estocástico.	214

*Fundamentos de Lógica Matemática y Computación*

Capítulo VI: Máquinas de Turing, computabilidad y complejidad.	
VI.1 Algoritmos y máquinas de Turing.	217
VI.1.1 Propiedades de las máquinas de Turing.	223
VI.1.2 Numeración de Gödel.	232
VI.1.3 Máquinas elementales (abreviaturas).	235
VI.2 Computabilidad, calculabilidad y recursividad.	242
VI.2.1 Computabilidad.	243
VI.2.2 Calculabilidad.	245
VI.2.3 Recursividad.	247
VI.2.3.1 Operaciones con funciones.	251
VI.2.3.2 Definiciones que combinan los conceptos de computabilidad, calculabilidad y recursividad.	254
VI.3 Complejidad computacional.	258
VI.3.1 Reglas para la traducción de monario y binario como cadenas.	268
Capítulo VII: Lenguajes y gramáticas.	
VII.1 Introducción	271
VII.2 Lenguajes.	271
VII.2.1 Operaciones con cadenas y lenguajes.	272
VII.3 Gramáticas.	281
VII.3.1 Gramáticas de tipo 0.	284
VII.3.2 Gramáticas de tipo 1.	285
VII.3.2.1 Recursividad de los lenguajes sensibles a contexto.	287
VII.3.3 Gramáticas de tipo 2.	288
VII.3.4 Gramáticas de tipo 3.	289
VII.3.5 Árboles de derivación y ambigüedad.	290
VII.3.6 Definiciones sobre lenguajes y gramáticas.	292
VII.3.7 Lenguajes regulares y autómatas finitos.	294
VII.3.8 Autómatas tipo pila.	299
VII.3.9 Resumen de clasificación de las gramáticas y los lenguajes.	304
Bibliografía.	307