

MÉTODOS DE SIMULACIÓN Y MODELADO

Solución al Trabajo Práctico - Enero de 2017

EJERCICIO 1

Lea el artículo citado a continuación, que puede descargar de la página web de la asignatura, y conteste a las preguntas.

Åström, K.J., Elmqvist, H., Mattsson, S.E. *Evolution of continuous-time modeling and simulation*. The 12th European Simulation Multiconference, ESM'98, June 16–19, 1998, Manchester, UK.

1. ¿Qué analogías pueden establecerse entre el modelado basado en diagramas de bloques y el paradigma de la simulación analógica?
2. ¿Qué es el paradigma de modelado físico? ¿Qué tipo de modelos matemáticos se obtienen de aplicar el paradigma del modelado físico?
3. ¿Qué diferencias hay entre el paradigma de la simulación analógica y el paradigma del modelado físico?
4. Observe la Figura 1.1 y comente su contenido basándose en el artículo.

Solución al Ejercicio 1

En este ejercicio el alumno debe contestar, con sus propias palabras, a las cuestiones planteadas.

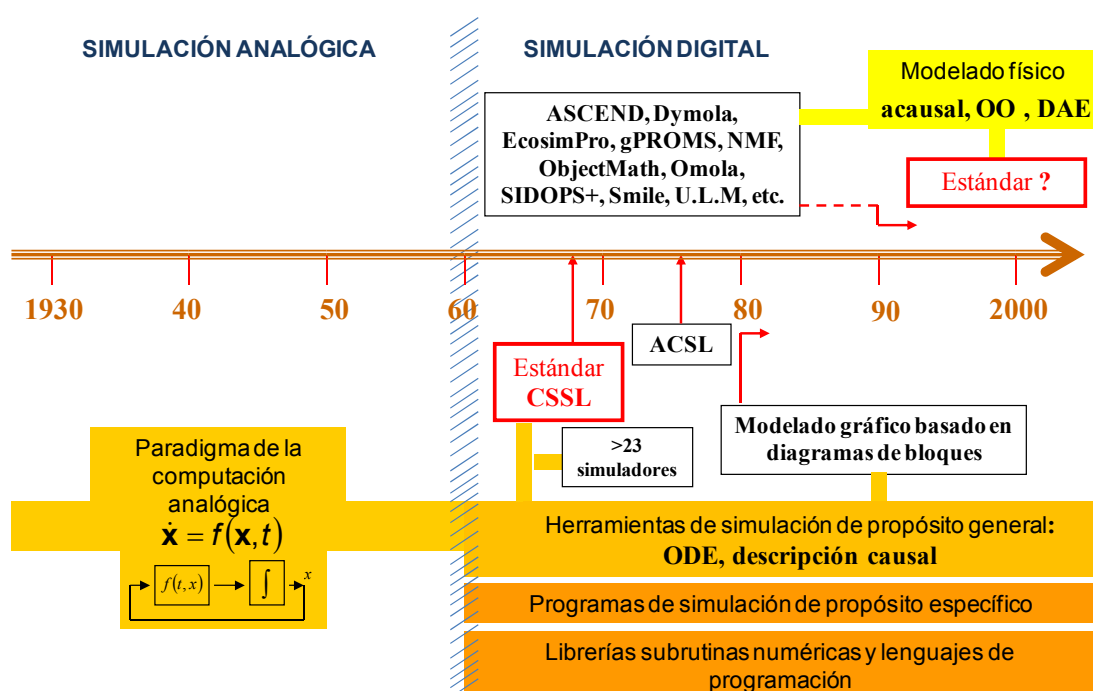


Figura 1.1: Evolución del modelado y simulación de tiempo continuo.

EJERCICIO 2

En la Figura 1.2 se muestra un circuito eléctrico compuesto por un generador sinusoidal de tensión, dos diodos, dos condensadores y una resistencia. Se ha señalado el nodo escogido como referencia para el voltaje. Se ha asignado nombre a la tensión en los nodos y a la corriente que circula por los componentes.

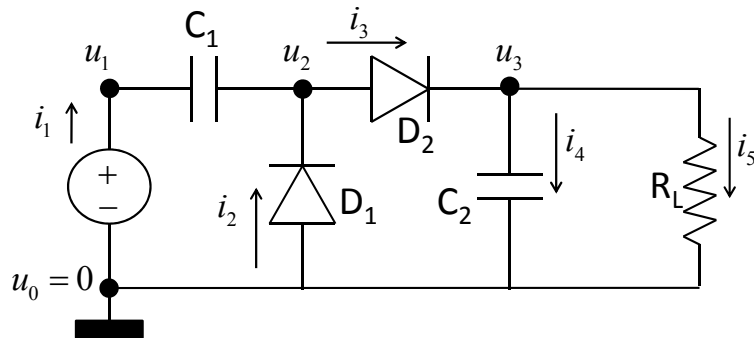


Figura 1.2: Diagrama de un circuito eléctrico.

Los valores de la resistencia y las capacidades son conocidos y constantes: $R_L = 1000 \text{ ohm}$, $C_1 = C_2 = 100 \text{ } \mu\text{F}$.

El generador sinusoidal de tensión tiene una amplitud de $U_1 = 120 \text{ V}$ y una frecuencia de 60 Hz .

Los diodos son descritos empleando el modelo de Shockley. Los parámetros del modelo tienen los valores siguientes: corriente de saturación, $I_s = 10^{-9} \text{ A}$; tensión térmica, $V_t = 0.025 \text{ V}$.

1. Escriba las ecuaciones del modelo del circuito.
2. Asigne la causalidad computacional. Indique cuántos grados de libertad tiene el modelo.
3. Escriba el diagrama de flujo del algoritmo para la simulación de este modelo. Emplee el método de integración de Euler explícito. La condición de finalización de la simulación es que el tiempo simulado alcance el valor 0.5 s .
4. Programe el algoritmo anterior en lenguaje R y ejecute la simulación. Represente gráficamente u_1 y u_3 frente al tiempo. Explique qué criterio ha seguido para escoger el tamaño del paso de integración.

Solución al Ejercicio 2

El circuito puede modelarse de la forma descrita a continuación, donde t representa el tiempo. No se muestran las ecuaciones en las cuales se asigna valor a las constantes y parámetros.

$$\begin{aligned}
 u_1 &= U_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \\
 u_{C_1} &= u_1 - u_2 \\
 C_1 \cdot \frac{du_{C_1}}{dt} &= i_1 \\
 i_2 &= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{-u_2}{V_t}\right) - 1 \right) \\
 i_3 &= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{u_2 - u_3}{V_t}\right) - 1 \right) \\
 C_2 \cdot \frac{du_3}{dt} &= i_4 \\
 u_3 &= i_5 \cdot R_L \\
 i_1 + i_2 &= i_3 \\
 i_3 &= i_4 + i_5
 \end{aligned}$$

Asumiendo que todas las variables que aparecen derivadas pueden ser seleccionadas como variables de estado, las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

- Parámetros y constantes: $U_1, \pi, f_1, C_1, I_s, V_t, C_2, R_L$
- Variables de estado: u_{C_1}, u_3
- Variables algebraicas: $u_1, u_2, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{du_{C_1}}{dt} \rightarrow deru_{C_1} \qquad \frac{du_3}{dt} \rightarrow deru_3$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$u_1 = U_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \quad (1.1)$$

$$u_{C_1} = u_1 - u_2 \quad (1.2)$$

$$C_1 \cdot \text{der}u_{C_1} = i_1 \quad (1.3)$$

$$i_2 = I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{-u_2}{V_t}\right) - 1 \right) \quad (1.4)$$

$$i_3 = I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{u_2 - u_3}{V_t}\right) - 1 \right) \quad (1.5)$$

$$C_2 \cdot \text{der}u_3 = i_4 \quad (1.6)$$

$$u_3 = i_5 \cdot R_L \quad (1.7)$$

$$i_1 + i_2 = i_3 \quad (1.8)$$

$$i_3 = i_4 + i_5 \quad (1.9)$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

- Conocidas: t
 $U_1, \pi, f_1, C_1, I_s, V_t, C_2, R_L$
 u_{C_1}, u_3
- Desconocidas: $u_1, u_2, i_1, i_2, i_3, i_4, i_5$
 $\text{der}u_{C_1}, \text{der}u_3$

Con el fin de analizar si el modelo es *estructuralmente singular*, se comprueba que:

1. El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 9 ecuaciones y 9 incógnitas.
2. Cada incógnita puede emparejarse con una ecuación en que aparezca y con la cual no se haya emparejado ya otra incógnita.

$$u_1 \rightarrow u_1 = U_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \quad \text{Ec. (1.1)}$$

$$u_2 \rightarrow u_{C_1} = u_1 - u_2 \quad \text{Ec. (1.2)}$$

$$deru_{C_1} \rightarrow C_1 \cdot deru_{C_1} = i_1 \quad \text{Ec. (1.3)}$$

$$i_2 \rightarrow i_2 = I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{-u_2}{V_t}\right) - 1 \right) \quad \text{Ec. (1.4)}$$

$$i_3 \rightarrow i_3 = I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{u_2 - u_3}{V_t}\right) - 1 \right) \quad \text{Ec. (1.5)}$$

$$deru_3 \rightarrow C_2 \cdot deru_3 = i_4 \quad \text{Ec. (1.6)}$$

$$i_5 \rightarrow u_3 = i_5 \cdot R_L \quad \text{Ec. (1.7)}$$

$$i_1 \rightarrow i_1 + i_2 = i_3 \quad \text{Ec. (1.8)}$$

$$i_4 \rightarrow i_3 = i_4 + i_5 \quad \text{Ec. (1.9)}$$

Finalmente, las ecuaciones del modelo, con la asignación de la causalidad computacional señalada, son las siguientes:

$$\begin{aligned} [u_1] &= U_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \\ u_{C_1} &= u_1 - [u_2] \\ C_1 \cdot [deru_{C_1}] &= i_1 \\ [i_2] &= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{-u_2}{V_t}\right) - 1 \right) \\ [i_3] &= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{u_2 - u_3}{V_t}\right) - 1 \right) \\ C_2 \cdot [deru_3] &= i_4 \\ u_3 &= [i_5] \cdot R_L \\ [i_1] + i_2 &= i_3 \\ i_3 &= [i_4] + i_5 \end{aligned}$$

El modelo ordenado y resuelto es el siguiente (existen otras posibles ordenaciones de las ecuaciones que son igualmente válidas):

$$\begin{aligned}
[u_1] &= U_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) \\
[u_2] &= u_1 - u_{C_1} \\
[i_2] &= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{-u_2}{V_t}\right) - 1 \right) \\
[i_3] &= I_s \cdot \left(\exp\left(\frac{u_2 - u_3}{V_t}\right) - 1 \right) \\
[i_5] &= \frac{u_3}{R_L} \\
[i_1] &= i_3 - i_2 \\
[i_4] &= i_3 - i_5 \\
[deru_3] &= \frac{i_4}{C_2} \\
[deru_{C_1}] &= \frac{i_1}{C_1}
\end{aligned}$$

En la Figura 1.3 se muestra el diagrama de flujo para la simulación del modelo, empleando el método de integración de Euler explícito y considerando como condición de finalización que el tiempo simulado alcance el valor 0.5 s. Se han asignado valores arbitrarios a los valores iniciales de las variables de estado. Se ha seleccionado un tamaño del paso para el cual el método de integración es estable.

A continuación, se muestra el código R y en la Figura 1.4 están las gráficas obtenidas de su ejecución. Obsérvese que se ha definido un paso de integración de 10^{-6} s y un intervalo de comunicación de 10^{-3} s. Únicamente se va almacenando durante la ejecución de la simulación, en los instantes de comunicación, el valor del tiempo, el voltaje del generador (u_1) y de la resistencia (u_3).

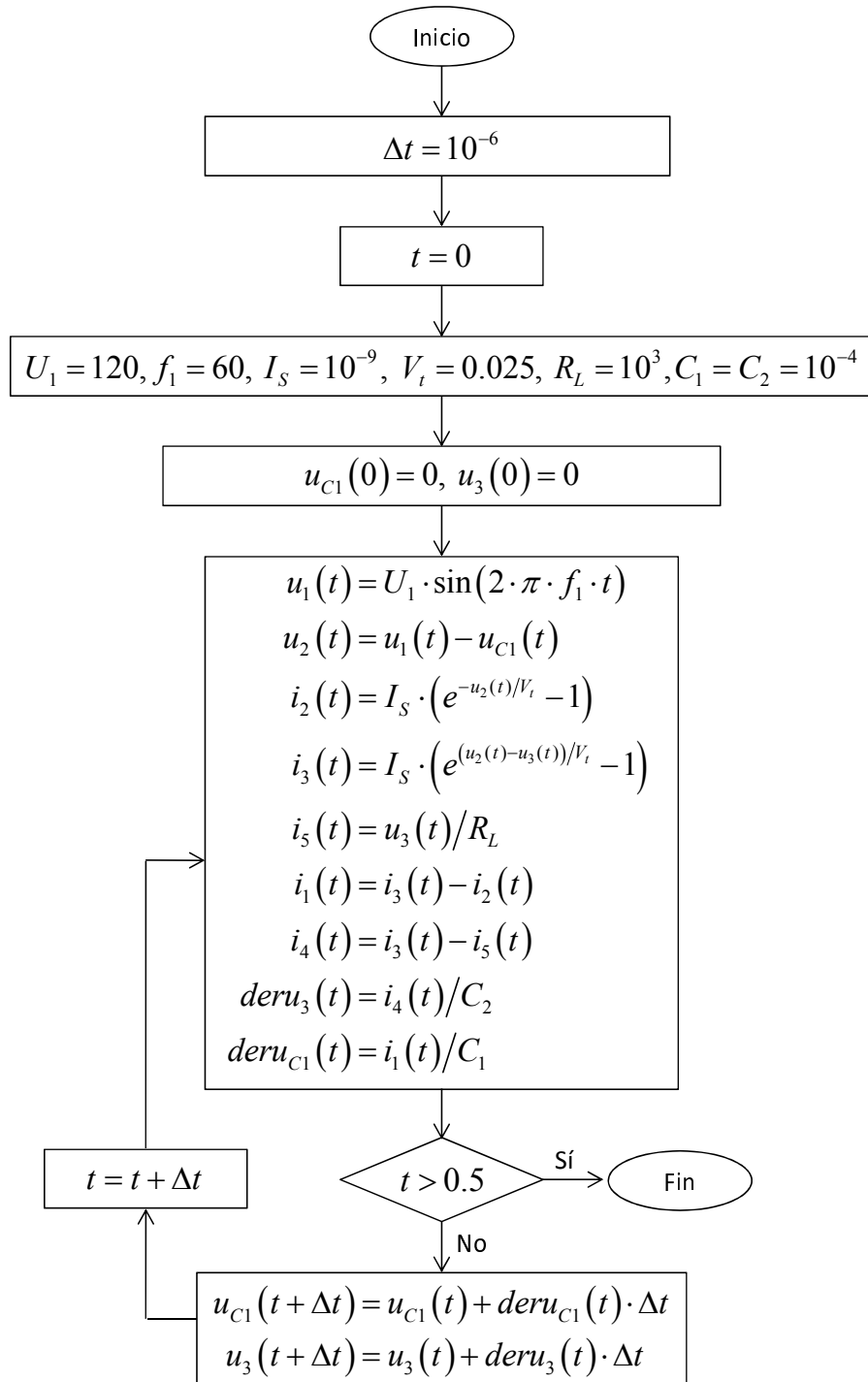


Figura 1.3: Diagrama de flujo de la simulación del modelo del circuito.

```

t_fin <- 0.5      # Valor final del tiempo
h      <- 1e-6    # Tamaño del paso de integración
t_com  <- 0.001   # Intervalo de comunicación
# Parámetros
PI <- 2*asin(1.0)
U1 <- 120
f1 <- 60
Is <- 1e-9
Vt <- 0.025
RL <- 1e3
C1 <- 1e-4
C2 <- 1e-4
# Inicialización del tiempo
t <- 0
# Valor inicial del estado
uC1 <- 0
u3  <- 0
# Inicialización resultados salida
t_plot      <- numeric(0)
u1_plot     <- numeric(0)
u3_plot     <- numeric(0)
t_ultimaCom <- -Inf
# Bucle de la simulación
termina <- F
while ( !termina ) {
  termina <- ( t > t_fin )
  # Cálculo variables algebraicas en t
  u1 <- U1*sin(2*PI*f1*t)
  u2 <- u1 - uC1
  i2 <- Is*( exp(-u2/Vt) - 1 )
  i3 <- Is*( exp((u2-u3)/Vt) - 1 )
  i5 <- u3/RL
  i1 <- i3 - i2
  i4 <- i3 - i5
  deru3 <- i4/C2
  deruC1 <- i1/C1
  # Almacenar resultados de salida
  if ( (t - t_ultimaCom) >= t_com | termina ) {
    t_plot <- c(t_plot, t)
    u1_plot <- c(u1_plot, u1)
    u3_plot <- c(u3_plot, u3)
    t_ultimaCom <- t
  }
  # Valor en t+h de los estados
  uC1 <- uC1 + h*deruC1
  u3  <- u3  + h*deru3
  # Actualización del valor del tiempo
  t <- t + h
}

```

```

# Representación gráfica
# Para poder usar minor.tick es necesario instalar el paquete Hmisc
# Configuración de la representación gráfica
par( mfrow = c(2,1) )
# u1 vs t
par( mai = c(0.3,1.2,0.4,0.1), cex = 1.3 )
plot(t_plot, u1_plot, lty = 1, type = "l",
      xlim = c(0,t_fin), ylim = c(-U1,U1), xaxt = "n",
      yaxt = "n", xlab = "", ylab = "u1 [V]", lwd = 2 )
axis(2, las = 2)
minor.tick(nx = 2, ny = 5, tick.ratio = 0.5)
abline(v = seq(0,t_fin,10*t_com), h = seq(-U1,U1,10),
       lwd = 0.5, lty = 3)
abline(h = 0, lwd = 1, lty = 1)
title("Voltaje en el generador y en la resistencia", cex = 1)
# u3 vs t
par( mai=c(1.1,1.2,0,0.1), cex = 1.3 )
plot(t_plot, u3_plot, lty = 1, type = "l",
      xlim = c(0,t_fin), ylim = c(0,220),
      yaxt = "n", xlab = "t [s]", ylab = "u3 [V]", lwd = 2)
axis(2, las = 2)
minor.tick(nx = 2, ny = 5, tick.ratio = 0.5)
abline(v = seq(0,t_fin,10*t_com), h = seq(0,220,10),
       lwd = 0.5, lty=3)
abline(h = 0, lwd = 1, lty=1)

```

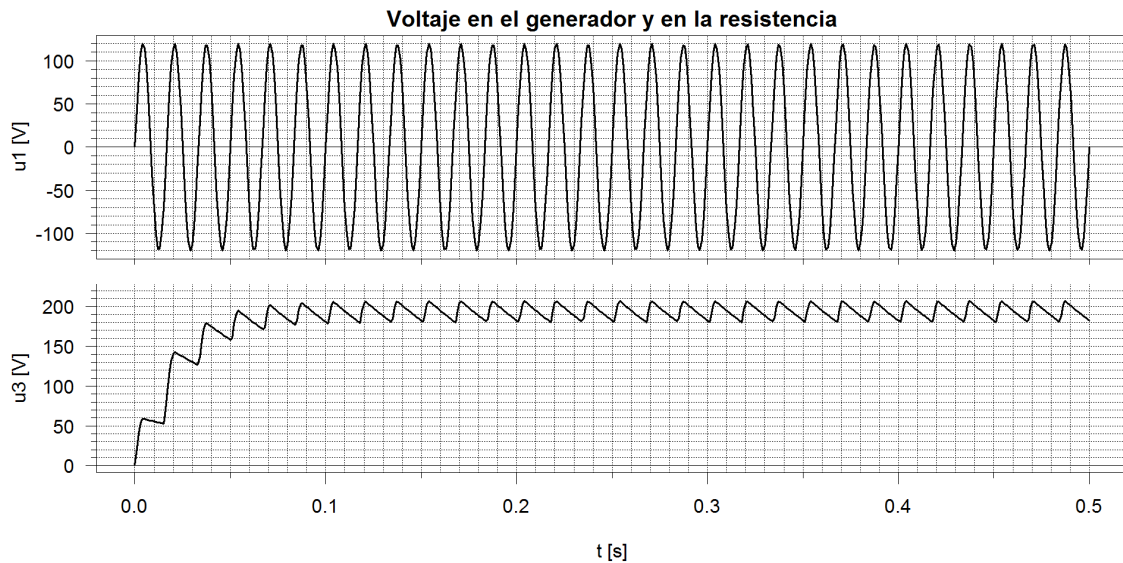


Figura 1.4: Resultado de la simulación del código R.

EJERCICIO 3

Describa en lenguaje Modelica el circuito mostrado en la Figura 1.2 de las tres maneras siguientes:

1. Como un modelo compuesto, empleando componentes de la Librería Estándar de Modelica. Emplee la versión de dicha librería que proporcione el entorno de modelado que usted esté empleando.
2. Como un modelo atómico, que viene descrito por las ecuaciones que usted ha planteado al contestar a la pregunta anterior.
3. Cree su propia librería eléctrica, de manera que contenga únicamente los componentes necesarios para componer el circuito de la Figura 1.2. Para desarrollar su librería, puede basarse en la librería eléctrica que aparece descrita en el texto base o en la Librería Estándar de Modelica. A continuación, defina el circuito como un modelo compuesto, instanciando y conectando componentes de la librería que ha creado.

Simule los tres modelos anteriores del circuito durante 0.5 s. Represente gráficamente u_1 y u_3 frente al tiempo en cada caso, mostrando las gráficas en la memoria.

Solución al Ejercicio 3

```

model duplicador
  Modelica.Electrical.Analog.Sources.SineVoltage V(V=120,
freqHz=60)
    annotation (extent=[-60,0;-40,20], rotation=-90);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Capacitor C1(C=100e-6)
    annotation (extent=[-20,22;0,42]);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Capacitor C2(C=100e-6)
    annotation (extent=[40,0;60,20], rotation=-90);
  Modelica.Electrical.Analog.Ideal.IdealDiode D1
    annotation (extent=[18,22;38,42]);
  Modelica.Electrical.Analog.Ideal.IdealDiode D2
    annotation (extent=[0,0;20,20], rotation=90);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Ground ground
    annotation (extent=[-60,-40;-40,-20]);
  Modelica.Electrical.Analog.Basic.Resistor RL(R=1000)
    annotation (extent=[70,0;90,20], rotation=-90);
equation
  connect(V.p, C1.p)
    annotation (points=[-50,20;-50,32;-20,32],
      style(color=3, rgbcolor={0,0,255}));
  connect(C1.n, D1.p)
    annotation (points=[0,32;18,32],
      style(color=3, rgbcolor={0,0,255}));
  connect(D2.n, D1.p)
    annotation (points=[10,20;10,32;18,32],
      style(color=3, rgbcolor={0,0,255}));
  connect(D1.n, C2.p)
    annotation (points=[38,32;50,32;50,20],
      style(color=3, rgbcolor={0,0,255}));
  connect(V.n, D2.p)
    annotation (points=[-50,0;-50,-10;10,-10;10,0],
      style(color=3, rgbcolor={0,0,255}));
  connect(D2.p, C2.n)
    annotation (points=[10,0;10,-10;50,-10;50,0],
      style(color=3, rgbcolor={0,0,255}));
  connect(ground.p, V.n)
    annotation (points=[-50,-20;-50,0],
      style(color=3, rgbcolor={0,0,255}));
  connect(D1.n, RL.p)
    annotation (points=[38,32;80,32;80,20],
      style(color=3, rgbcolor={0,0,255}));
  connect(RL.n, C2.n)
    annotation (points=[80,0;80,-10;50,-10;50,0],
      style(color=3, rgbcolor={0,0,255}));
  annotation (uses(Modelica(version="2.2.1")), Diagram,
    experiment(StopTime=0.5,NumberOfIntervals=5000,
Tolerance=1e-005),
    experimentSetupOutput);
end duplicador;

```

Código 1.1: Ejercicio 3.1: modelo compuesto empleando componentes de la MSL.

```

model duplicadorAtomico
  parameter Real U1 = 120;
  parameter Real freqHz = 60;
  parameter Real C1 = 100e-6;
  parameter Real C2 = 100e-6;
  parameter Real RL = 1000;
  parameter Real Is = 1e-9;
  parameter Real Vt = 0.025;
  Real u1;
  Real u2;
  Real u3;
  Real uC1;
  Real i1;
  Real i2;
  Real i3;
  Real i4;
  Real i5;
equation
  u1 = U1*sin(2*Modelica.Constants.pi*freqHz*time);
  uC1 = u1 - u2;
  C1*der(uC1) = i1;
  i2 = Is*(exp(-u2/Vt) - 1);
  i3 = Is*(exp((u2-u3)/Vt) - 1);
  C2*der(u3) = i4;
  u3 = i5*RL;
  i1+i2 = i3;
  i3 = i4+i5;
  annotation (uses(Modelica(version="2.2.1")),
    experiment(StopTime=0.5,NumberOfIntervals=5000,
Tolerance=1e-005),
    experimentSetupOutput);
end duplicadorAtomico;

```

Código 1.2: Ejercicio 3.2: modelo atómico.

```
encapsulated package LibElectrica
```

```
import SI = Modelica.SIunits;
import Modelica.Constants;
```

```
package Interfaces
```

```
connector Pin
  SI.Voltage u;
  flow SI.Current i;
end Pin;
```

```
partial model DosPines
```

```
  Pin p, n;
protected
  SI.Voltage u "Voltaje entre pines (= p.u - n.u)";
equation
  u = p.u - n.u;
end DosPines;
```

```
partial model UnPuerto
```

```
  extends DosPines;
  parameter Boolean activo=false;
protected
  SI.Current i "Corriente a traves del componente";
equation
  if (activo) then
    i = n.i;
  else
    i = p.i;
  end if;
  p.i = -n.i;
end UnPuerto;
```

```
end Interfaces;
```

```
package Componentes
```

```
model Resistencia "Resistencia ideal"
```

```
  extends Interfaces.UnPuerto;
  parameter SI.Resistance R "Resistencia";
equation
  u = R*i;
end Resistencia;
```

```
model Diodo "Diodo ideal"
```

```
  extends Interfaces.UnPuerto;
  parameter SI.Current Is=1e-9 "Corriente saturacion";
  parameter SI.Voltage Vt=0.025 "Tension termica";
equation
  i = Is*(exp(u/Vt) - 1);
end Diodo;
```

Código 1.3: Ejercicio 3.3: librería eléctrica y modelo (1/2).

```

model Condensador "Condensador ideal"
    extends Interfaces.UnPuerto;
    parameter SI.Capacitance C "Capacidad";
equation
    C*der(u) = i;
end Condensador;

model VfuelleAC "Fuente tension AC"
    extends Interfaces.UnPuerto(activo=true);
    parameter SI.Voltage U0;
    parameter SI.Frequency freq;
    parameter SI.Angle phi;
protected
    parameter SI.AngularFrequency w=2*Constants.pi*freq;
equation
    u = U0*sin(w*time + phi);
end VfuelleAC;

model Tierra "Tierra"
    Interfaces.Pin p;
equation
    p.u = 0;
end Tierra;

end Componentes;

package Ejemplos

model duplicador
    Componentes.VfuelleAC V(U0=120, freq=60, phi=0);
    Componentes.Condensador C1(C=100e-6);
    Componentes.Condensador C2(C=100e-6);
    Componentes.Diodo D1(Is=1e-9, Vt=0.025);
    Componentes.Diodo D2(Is=1e-9, Vt=0.025);
    Componentes.Tierra ground;
    Componentes.Resistencia RL(R=1000);
equation
    connect(V.p, C1.p);
    connect(C1.n, D1.p);
    connect(D2.n, D1.p);
    connect(D1.n, C2.p);
    connect(V.n, D2.p);
    connect(D2.p, C2.n);
    connect(ground.p, V.n);
    connect(D1.n, RL.p);
    connect(RL.n, C2.n);
annotation
    (experiment(StopTime=0.5,NumberOfIntervals=5000,
Tolerance=1e-005));
end duplicador;

end Ejemplos;

end LibElectrica;

```

Código 1.4: Ejercicio 3.3: librería eléctrica y modelo (2/2).

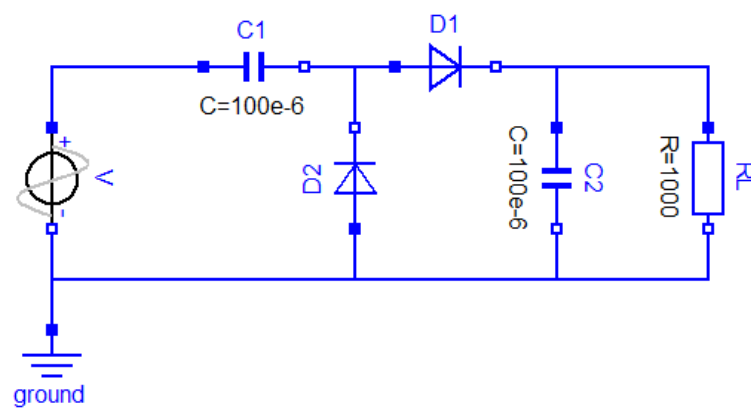


Figura 1.5: Diagrama del circuito compuesto usando la MSL.

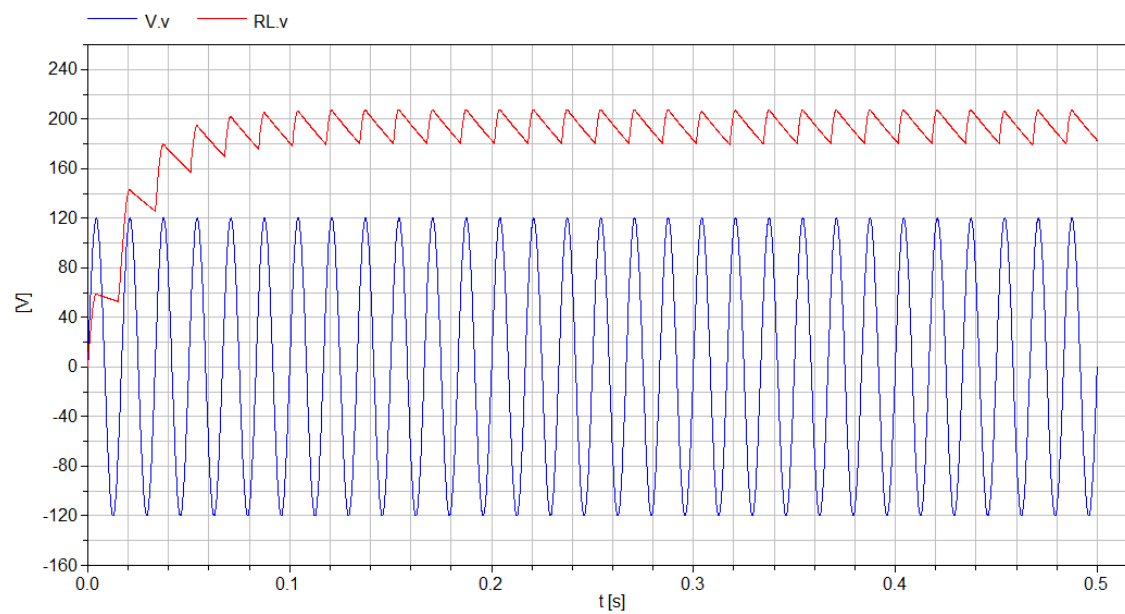


Figura 1.6: Resultado de la simulación usando Dymola.

EJERCICIO 4

Consideremos el problema en dos dimensiones de un cable coaxial de sección interior y exterior circular (véase la Figura 1.7). Los radios de las secciones interior (r_0) y exterior (r_1) son, respectivamente, 1.3 cm y 10 cm.

El conductor exterior está conectado a 0 V y el conductor interior está conectado a 1 V.

El medio entre ambos conductores está formado por un dieléctrico de permitividad relativa $\epsilon_r = 2.3$.

Obtenga un gráfico con las curvas de nivel del potencial eléctrico y otro gráfico con los vectores correspondientes al campo eléctrico en la superficie dieléctrica empleando FlexPDE. Escriba el código del *script* de FlexPDE correspondiente y muestre los dos gráficos generados por FlexPDE.

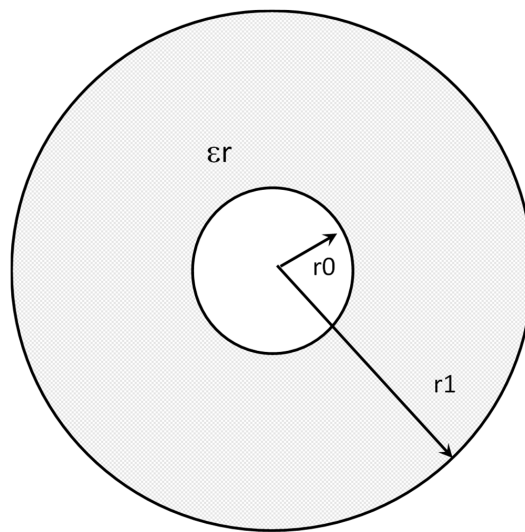


Figura 1.7: Sección transversal del cable coaxial.

Solución al Ejercicio 4

El *script* se muestra en el Código 1.5 y los gráficos en las Figuras 1.8–1.9.

```

TITLE
  'Cable coaxial'
SELECT
  errlim=1e-3 !Control de precision
  spectral_colors
VARIABLES
  U
DEFINITIONS
  eps0=8.854e-12 !Permitividad vacio
  eps=2.3 *eps0 !Permitividad dieléctrico
  r0=0.013 !Radio conductor interior
  r1=0.1 !Radio conductor exterior
  U0=1 !Diferencia de potencial
  Ex=-dx(U) Ey=-dy(U)
  E = -grad(U)
  Dex = eps*Ex
  Dey = eps*Ey
  D = eps*E
EQUATIONS
  div(D )=0
BOUNDARIES
REGION 'dominio'
  START 'exterior' (r1,0) VALUE(U)= 0 arc(center = 0,0) angle = 360 !exterior
  START 'interior' (r0,0) VALUE(U) = U0 arc(center = 0,0) angle = 360 !interior
PLOTS
CONTOUR(U) !Potencial
VECTOR(Ex, Ey) !Campo electrico
END

```

Código 1.5: Cable coaxial de sección circular.

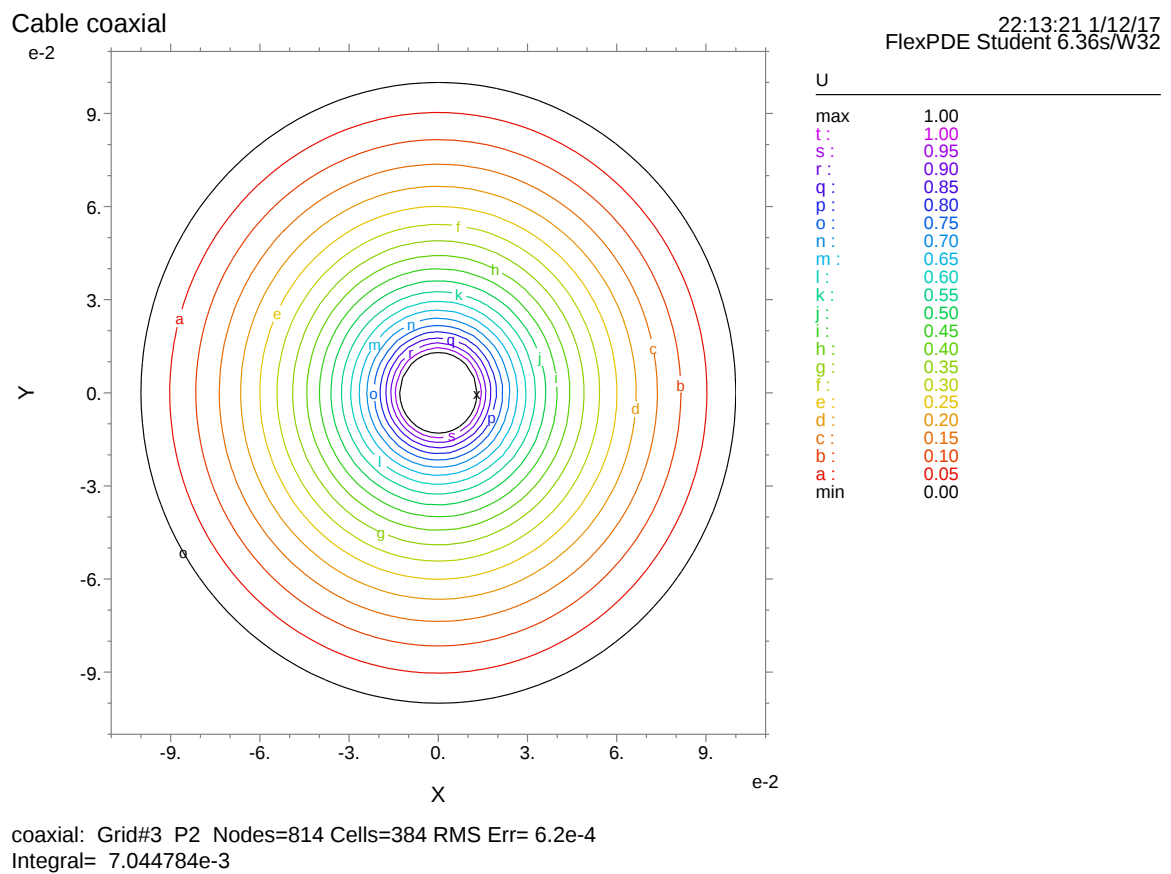


Figura 1.8: Potencial en el interior del cable coaxial.

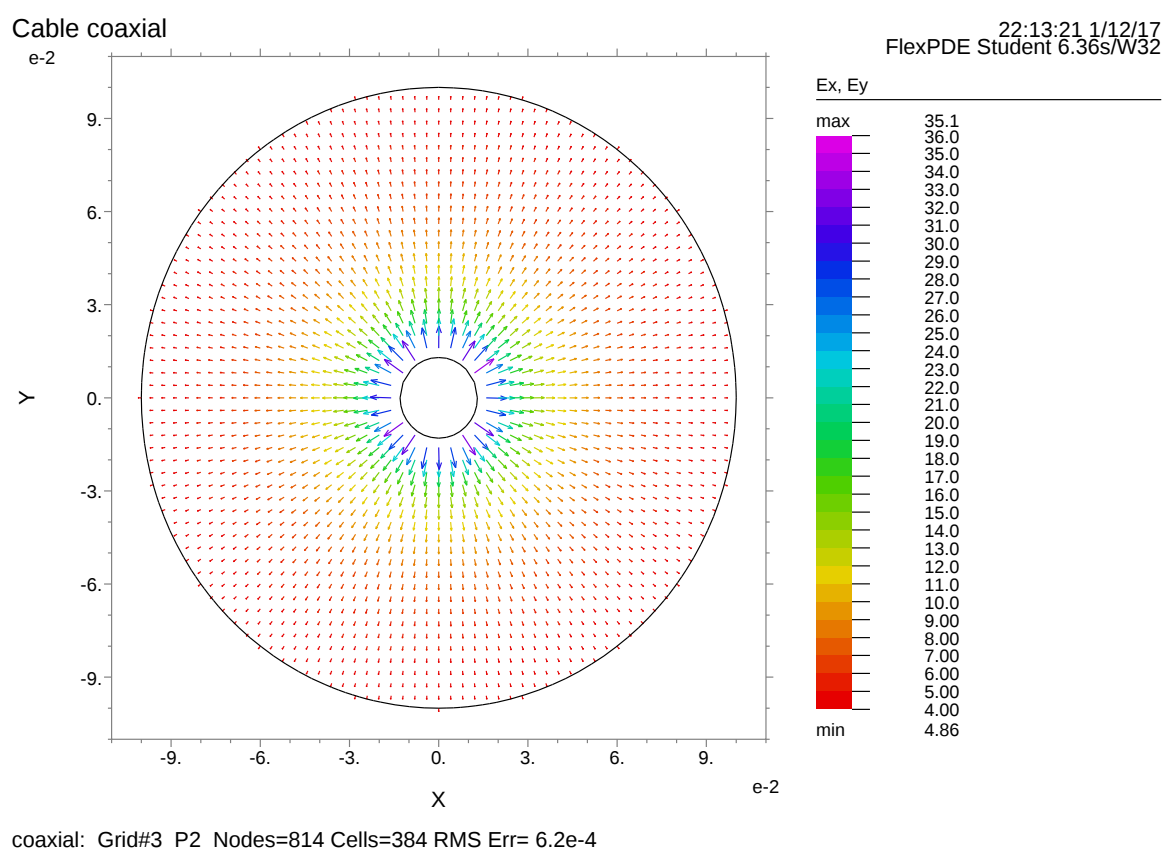


Figura 1.9: Campo en el interior del cable coaxial.