MÉTODOS DE SIMULACIÓN Y MODELADO

Solución al examen de Septiembre 2018

PREGUNTA 1 (2 puntos)

Responda a las preguntas siguientes.

1.a (1 punto) Explique qué análisis y manipulaciones realizan los entornos de modelado de Modelica sobre el modelo descrito en Modelica para generar el ejecutable de su simulación.

1.b (1 punto) Explique qué es el chattering, en el contexto de la simulación de modelos dinámicos híbridos. Ponga un ejemplo.

Solución a la Pregunta 1

1.a Véase la explicación a la Figura 3.1 del texto base.
1.b Véase la Sección 4.3.4 del texto base.

PREGUNTA 2 (2 puntos)

A continuación se muestra un modelo matemático, donde la variable t representa el tiempo y $\exp()$ representa la función exponencial.

$$
\begin{aligned}
\frac{dv_1}{dt} &= a_1 \\
F_1 &= m_1 \cdot a_1 \\
\frac{dv_2}{dt} &= a_2 \\
F_2 &= m_2 \cdot a_2 \\
F_1 &= -K \cdot (v_1 - v_2) - K_g \cdot v_1 \\
F_2 &= -K \cdot (v_2 - v_1) + f \\
f &= f_0 \cdot \exp(-\tau \cdot t)
\end{aligned}
$$

$m_1 = 100$	$m_2 = 300$
$K = 1.3 \cdot 10^{-2}$	$K_g = 0.85$
$f_0 = 10$	$\tau = 3.1$

2.a (1 punto) Clasifique las variables del modelo en parámetros, variables de estado y variables algebraicas. A continuación, realice la asignación de la causalidad computacional. Explique detalladamente el procedimiento seguido para ello.

2.b (1 punto) Escriba el diagrama de flujo del algoritmo para la simulación de este modelo. Emplee el método de integración de Euler explícito. Asigne el valor inicial que desee a las variables de estado. La condición de finalización de la simulación es que el tiempo simulado alcance el valor 10 s.

Solución a la Pregunta 2

Las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes: m_1, m_2, K, K_g, f_0, τ
– Variables de estado: v_1, v_2
– Variables algebraicas: a_1, a_2, F_1, F_2, f

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{dv_1}{dt} \rightarrow derv1, \qquad \frac{dv_2}{dt} \rightarrow derv2$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$\begin{aligned} derv1 &= a_1 && (1.1)\\ F_1 &= m_1 \cdot a_1 && (1.2)\\ derv2 &= a_2 && (1.3)\\ F_2 &= m_2 \cdot a_2 && (1.4)\\ F_1 &= -K \cdot (v_1 - v_2) - K_g \cdot v_1 && (1.5)\\ F_2 &= -K \cdot (v_2 - v_1) + f && (1.6)\\ f &= f_0 \cdot \exp(-\tau \cdot t) && (1.7) \end{aligned}$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas: t
m_1, m_2, K, K_g, f_0, τ
v_1, v_2
– Desconocidas: a_1, a_2, F_1, F_2, f
$derv1$, $derv2$

Con el fin de analizar si el modelo es *estructuralmente singular*, se comprueba que:

1. El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 7 ecuaciones y 7 incógnitas: a_1, a_2, F_1, F_2, f, $derv1$, $derv2$.

2. Cada incógnita puede emparejarse con una ecuación en que aparezca y con la cual no se haya emparejado ya otra incógnita.

$$
\begin{array}{lcll}
derv1 & \rightarrow & derv1 = a_1 & \text{Ec. (1.1)} \\
a_1 & \rightarrow & F_1 = m_1 \cdot a_1 & \text{Ec. (1.2)} \\
derv2 & \rightarrow & derv2 = a_2 & \text{Ec. (1.3)} \\
a_2 & \rightarrow & F_2 = m_2 \cdot a_2 & \text{Ec. (1.4)} \\
F_1 & \rightarrow & F_1 = -K \cdot (v_1 - v_2) - K_g \cdot v_1 & \text{Ec. (1.5)} \\
F_2 & \rightarrow & F_2 = -K \cdot (v_2 - v_1) + f & \text{Ec. (1.6)} \\
f & \rightarrow & f = f_0 \cdot \exp(-\tau \cdot t) & \text{Ec. (1.7)}
\end{array}
$$

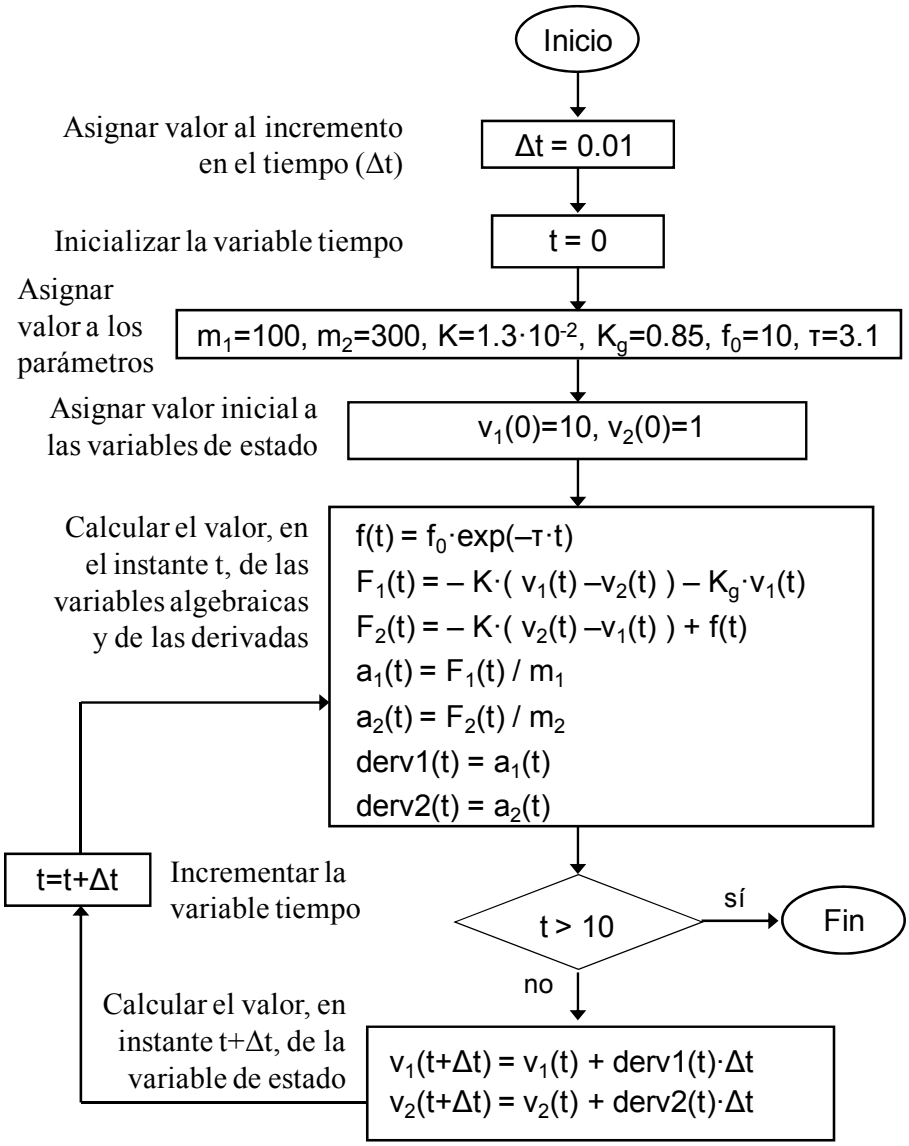
Finalmente, las ecuaciones del modelo, con la asignación de la causalidad computacional señalada, son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
[derv1] &= a_1 \\
F_1 &= m_1 \cdot [a_1] \\
[derv2] &= a_2 \\
F_2 &= m_2 \cdot [a_2] \\
[F_1] &= -K \cdot (v_1 - v_2) - K_g \cdot v_1 \\
[F_2] &= -K \cdot (v_2 - v_1) + f \\
[f] &= f_0 \cdot \exp(-\tau \cdot t)
\end{aligned}
$$

El modelo ordenado y resuelto es el siguiente (existen otras posibles ordenaciones de las ecuaciones que son igualmente válidas):

$$
\begin{aligned}
[f] &= f_0 \cdot \exp(-\tau \cdot t) \\
[F_1] &= -K \cdot (v_1 - v_2) - K_g \cdot v_1 \\
[F_2] &= -K \cdot (v_2 - v_1) + f \\
[a_1] &= \frac{F_1}{m_1} \\
[a_2] &= \frac{F_2}{m_2} \\
[derv1] &= a_1 \\
[derv2] &= a_2
\end{aligned}
$$

En la figura siguiente se muestra el diagrama de flujo para la simulación del modelo, empleando el método de integración de Euler explícito y considerando como condición de finalización que el tiempo simulado alcance el valor 10 s. Se han asignado valores arbitrarios a los valores iniciales de las variables de estado.



PREGUNTA 3 (4 puntos)

Consideremos el sistema mostrado en la Figura 1.1, que consiste en un objeto de masa constante m, que se encuentra suspendido del techo a través de un amortiguador, está unido al suelo a través de un muelle y roza contra la pared lateral. El suelo, el techo y la pared lateral se encuentran en reposo. El objeto puede moverse únicamente en la dirección vertical. Sobre él actúa la fuerza de la gravedad.

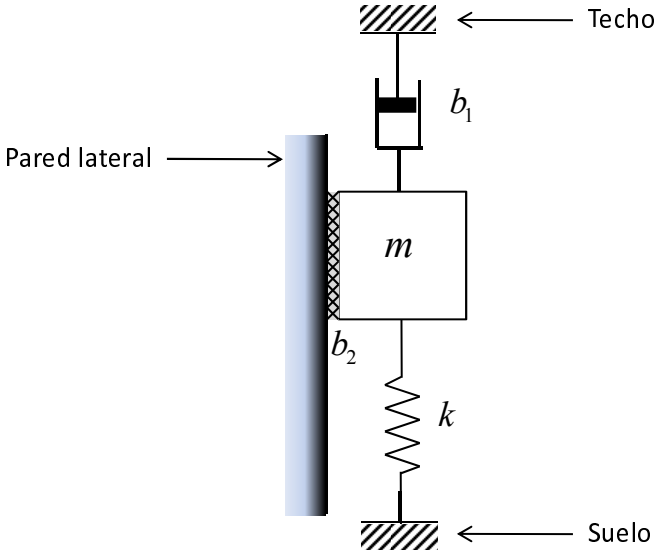


Figura 1.1: Diagrama del sistema mecánico.

Realizamos las suposiciones siguientes:

- La aceleración gravitatoria es igual a $g = 9.81$ m/s^2.
- La fuerza de fricción entre el objeto y la pared lateral es proporcional a la diferencia entre las velocidades de las superficies en contacto. El coeficiente de proporcionalidad, b_2, es un parámetro del modelo.
- El amortiguador y el muelle se comportan linealmente. El coeficiente del amortiguador (b_1) y el coeficiente del muelle (k) son parámetros de valor conocido.

Los parámetros del modelo se muestran en la tabla siguiente.

Símbolo	Significado	Valor	Unidades
m	Masa del objeto	15	kg
k	Coeficiente del muelle	250	N/m
L	Longitud natural del muelle	1.5	m
b_1	Coeficiente del amortiguador	25	N·s/m
b_2	Coeficiente de fricción	10	N·s/m
g	Aceleración gravitatoria	9.81	m/s^2

Realice las tareas siguientes:

3.a (1 punto) Escriba las ecuaciones del modelo del sistema mecánico. El modelo debe describir la evolución de la longitud del muelle (x) y la velocidad del objeto (v). Compruebe que el número de ecuaciones es igual al número de variables desconocidas a efectos de la asignación de la causalidad computacional.

3.b (2 puntos) Describa el modelo en Modelica, como un modelo atómico.

3.c Suponga que desea programar en Modelica una librería mecánica que contenga los componentes necesarios para componer el sistema mecánico de la Figura 1.1.

Escriba el código Modelica de las dos siguientes clases de dicha librería:

3.c.1 (0.5 puntos) El conector que describe la interacción entre los componentes.

3.c.2 (0.5 puntos) El modelo que describe el muelle.

Solución a la Pregunta 3

El sistema mecánico puede modelarse de la forma descrita a continuación. No se muestran las asignaciones de valor a las constantes y parámetros.

$$
\begin{aligned}
m \cdot \frac{dv}{dt} &= F_k + F_{b1} + F_{b2} + F_g && (1.8)\\
F_k &= -k \cdot (x - L) && (1.9)\\
F_{b1} &= -b_1 \cdot v && (1.10)\\
F_{b2} &= -b_2 \cdot v && (1.11)\\
F_g &= -m \cdot g && (1.12)\\
\frac{dx}{dt} &= v && (1.13)
\end{aligned}
$$

La variable t representa el tiempo. El parámetro L representa la longitud natural del muelle y la variable x representa la longitud actual del muelle, que coincide con la altura sobre el suelo a la que se encuentra la masa.

Las variables F_k, F_{b1}, F_{b2} y F_g representan la fuerza ejercida sobre la masa por el muelle, el amortiguador, la fricción con la pared lateral y la gravedad, respectivamente.

El criterio de signos que hemos adoptado para la velocidad ha sido el siguiente. Hemos considerado que la velocidad de la masa (v) es positiva si la masa se desplaza hacia arriba, es decir, si aumenta la longitud del muelle (x). Asimismo, las fuerzas son positivas si tienen sentido ascendente y negativas si descendente.

Asumiendo que las dos variables que aparecen derivadas pueden ser seleccionadas como variables de estado, las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes: m, k, b_1, b_2, L, g
– Variables de estado: x, v
– Variables algebraicas: F_k, F_{b1}, F_{b2}, F_g

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{dx}{dt} \rightarrow derx \qquad\qquad \frac{dv}{dt} \rightarrow derv$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$
\begin{aligned}
m \cdot derv &= F_k + F_{b1} + F_{b2} + F_g && (1.14)\\
F_k &= -k \cdot (x - L) && (1.15)\\
F_{b1} &= -b_1 \cdot v && (1.16)\\
F_{b2} &= -b_2 \cdot v && (1.17)\\
F_g &= -m \cdot g && (1.18)\\
derx &= v && (1.19)
\end{aligned}
$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas: t
m, k, b_1, b_2, L, g
x, v
– Desconocidas: F_k, F_{b1}, F_{b2}, F_g
$derx$, $derv$

El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 6 ecuaciones y 6 incógnitas.

Obsérvese la Ec. (1.18). La variable F_g se calcula de una expresión en la cual sólo intervienen constantes y parámetros. Por ello, F_g tendrá un valor constante durante toda la simulación, el cual puede calcularse en la inicialización del modelo.

El modelo atómico en lenguaje Modelica se muestra en Código 1.1. Puede comprobarse que F_g se ha declarado como un parámetro. El Código 1.2 contiene la declaración del conector y del muelle.

```
model ObjetoColgante
  import SI = Modelica.SIunits;
  constant  SI.Acceleration g = 9.81 "Aceleración gravitatoria";
  parameter SI.Mass m = 15 "Masa del objeto";
  parameter SI.TranslationalDampingConstant b1 = 25 "Amortiguador";
  parameter SI.TranslationalDampingConstant b2 = 10 "Fricción";
  parameter SI.TranslationalSpringConstant k = 250 "Muelle";
  parameter SI.Length L = 1.5 "Longitud natural del muelle";
  SI.Position x(start=2, fixed=true) "Longitud del muelle";
  SI.Velocity v(start=0, fixed=true) "Velocidad del objeto";
  SI.Force Fk "Fuerza ejercida por el muelle";
  SI.Force Fb1 "Fuerza ejercida por el amortiguador";
  SI.Force Fb2 "Fuerza ejercida por la fricción";
  parameter SI.Force Fg = -m*g "Fuerza gravitatoria";
equation
  m*der(v) = Fk + Fb1 + Fb2 + Fg;
  Fk = -k*(x-L);
  Fb1 = -b1*v;
  Fb2 = -b2*v;
  der(x) = v;
end ObjetoColgante;
```

Código 1.1: Pregunta 3.b: modelo atómico del sistema mecánico.

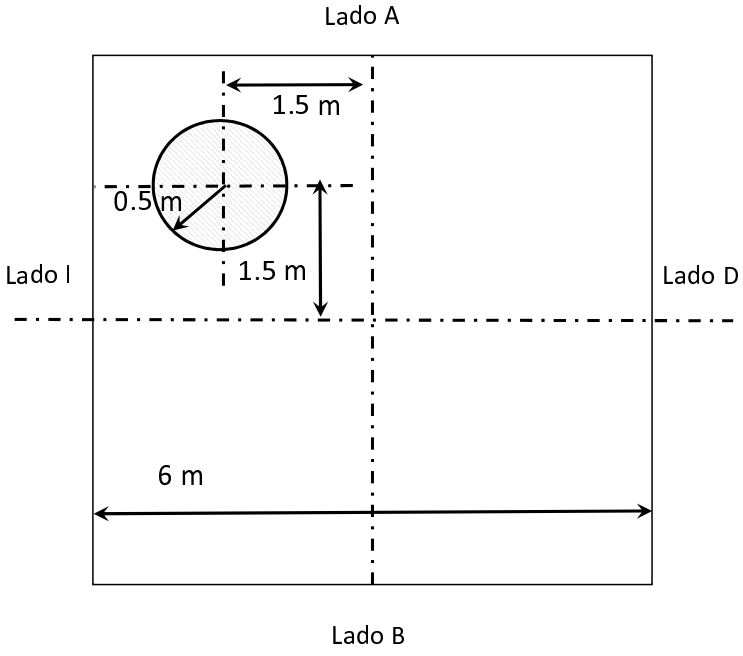
```
connector Port "Posicion / Fuerza"
   Modelica.SIunits.Position x;
   flow Modelica.SIunits.Force f;
end Port;


model Muelle "Muelle ideal"
   Port p1;
   Port p2;
   parameter Real K(unit="N/m") = 1 "Coef. restitucion";
   parameter Modelica.SIunits.Length longNat=1 "Longitud natural";
protected
   Modelica.SIunits.Length long "longitud";
equation
   long = p2.x - p1.x;
   p1.f = K*(long - longNat);
   p2.f = -p1.f;
end Muelle;
```

Código 1.2: Pregunta 3.c: conector y muelle.

PREGUNTA 4 (2 puntos)

Escriba un *script* en FlexPDE para obtener el mapa de contorno de distribución de temperatura y los vectores correspondientes al flujo de calor del sistema descrito a continuación.

Se trata de un problema de dos dimensiones, cuya geometría se muestra en la siguiente figura.



El sistema está formado por un material cuadrado en cuyo interior hay un círculo de un material aislante.

El cuadrado tiene de lado 6 m.

El lado del cuadrado llamado I en la figura se mantiene a 400 K y el lado llamado D se mantiene a 300 K, mientras que los lados llamados A y B están aislados térmicamente.

El circulo tiene un radio de 0.5 m y una conductividad térmica κ_1 de 0.001 W/(K·m).

La conductividad térmica del cuadrado, excluyendo el círculo interior, es $\kappa_2 = 1$ W/(K·m).

Si dividimos el cuadrado en cuatro cuadrados iguales, el círculo está centrado en el centro del cuadrado superior izquierdo.

Solución a la Pregunta 4

El *script* se muestra a continuación.

```
TITLE
    "Conduccion calor"
SELECT
    errlim=1e-3     spectral_colors
VARIABLES
  temp
DEFINITIONS
    L=3.0      r0=0.5     k=1
EQUATIONS
    div(-k* grad( temp))=0
BOUNDARIES
region   'cuadrado'
    start 'cuadrado'  (-L,-L)   natural(temp)= 0   line to (L,-L) !Lado B
    value(temp) = 300  LINE to (L,L)       !Lado D
    natural(temp) = 0  LINE to (-L,L)    !Lado A
    value(temp) = 400  LINE to close     !Lado I
region 'circulo'
    k=0.001
   start 'circulo'  (-L/2+r0,L/2)                  { Circulo interior }
    natural(temp)=0     arc( center=-L/2,L/2) angle=360
PLOTS
    contour(temp)           vector( -k*grad(temp))
END
```