MÉTODOS DE SIMULACIÓN Y MODELADO

Solución al examen de Febrero 2025

Pregunta 1 (2 puntos)

1.a (1 punto) Explique qué significa que un lenguaje de modelado esté "basado en ecuaciones". Indique si Modelica es un lenguaje de modelado basado en ecuaciones y justifique su respuesta.

1.b (1 punto) Explique qué significa que un modelo matemático dinámico es un sistema "fuertemente stiff" (el término inglés stiff se traduce en ocasiones al español como "rígido"). Ponga un ejemplo de este tipo de modelo.

Solución a la Pregunta 1

1.a Véase la página 143 del texto base.
1.b Véase la página 341 del texto base.

Pregunta 2 (2 puntos)

A continuación se muestra un modelo matemático, donde la variable t representa el tiempo y la función log el logaritmo natural.

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= A \cdot x - m \\
\frac{dy}{dt} &= -C \cdot y + p \\
p - \frac{D \cdot m}{B} &= 0 \\
m &= B \cdot x \cdot y \\
A \cdot \log(y) + C \cdot \log(x) &= D \cdot x + B \cdot y + k
\end{aligned}$$

$$A = 0.1, \qquad B = 0.02, \qquad C = 0.3, \qquad D = 0.01$$

2.a (1 punto) Clasifique las variables del modelo en parámetros, variables de estado y variables algebraicas. A continuación, realice la asignación de la causalidad computacional. Explique detalladamente el procedimiento seguido para ello.

2.b (1 punto) Escriba el diagrama de flujo del algoritmo para la simulación de este modelo. Emplee el método de integración de Euler explícito. Asigne el valor inicial que desee a las variables de estado. La condición de finalización de la simulación es que el tiempo simulado alcance el valor 200 s.

Solución a la Pregunta 2

Las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes: A, B, C, D
– Variables de estado: x, y
– Variables algebraicas: m, p, k

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{dx}{dt} \to derx, \qquad \frac{dy}{dt} \to dery$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$derx = A \cdot x - m \tag{1.1}$$
$$dery = -C \cdot y + p \tag{1.2}$$
$$p - \frac{D \cdot m}{B} = 0 \tag{1.3}$$
$$m = B \cdot x \cdot y \tag{1.4}$$
$$A \cdot \log(y) + C \cdot \log(x) = D \cdot x + B \cdot y + k \tag{1.5}$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas: t
A, B, C, D
x, y
– Desconocidas: m, p, k
$derx$, $dery$

Con el fin de analizar si el modelo es *estructuralmente singular*, se comprueba que:

1. El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 5 ecuaciones y 5 incógnitas: m, p, k, $derx$, $dery$.

2. Cada incógnita puede emparejarse con una ecuación en que aparezca y con la cual no se haya emparejado ya otra incógnita.

$$\begin{array}{lll} derx & \rightarrow & derx = A \cdot x - m & \text{Ec. (1.1)} \\ dery & \rightarrow & dery = -C \cdot y + p & \text{Ec. (1.2)} \\ p & \rightarrow & p - \frac{D \cdot m}{B} = 0 & \text{Ec. (1.3)} \\ m & \rightarrow & m = B \cdot x \cdot y & \text{Ec. (1.4)} \\ k & \rightarrow & A \cdot \log(y) + C \cdot \log(x) = D \cdot x + B \cdot y + k & \text{Ec. (1.5)} \end{array}$$

Finalmente, las ecuaciones del modelo, con la asignación de la causalidad computacional señalada, son las siguientes:

$$\begin{aligned} [derx] &= A \cdot x - m \\ [dery] &= -C \cdot y + p \\ [p] - \frac{D \cdot m}{B} &= 0 \\ [m] &= B \cdot x \cdot y \\ A \cdot \log(y) + C \cdot \log(x) &= D \cdot x + B \cdot y + [k] \end{aligned}$$

El modelo ordenado y resuelto es el siguiente (existen otras posibles ordenaciones de las ecuaciones que son igualmente válidas):

$$\begin{array}{rcl} x, y & & \text{Variables de estado} \\ [m] & = & B \cdot x \cdot y \\ [p] & = & \dfrac{D \cdot m}{B} \\ [k] & = & A \cdot \log(y) + C \cdot \log(x) - D \cdot x - B \cdot y \\ [derx] & = & A \cdot x - m \\ [dery] & = & -C \cdot y + p \end{array}$$

En la Figura 1 se muestra el diagrama de flujo para la simulación del modelo, empleando el método de integración de Euler explícito y considerando como condición de finalización que el tiempo simulado alcance el valor 200 s. Se han asignado valores arbitrarios a los valores iniciales de las variables de estado.

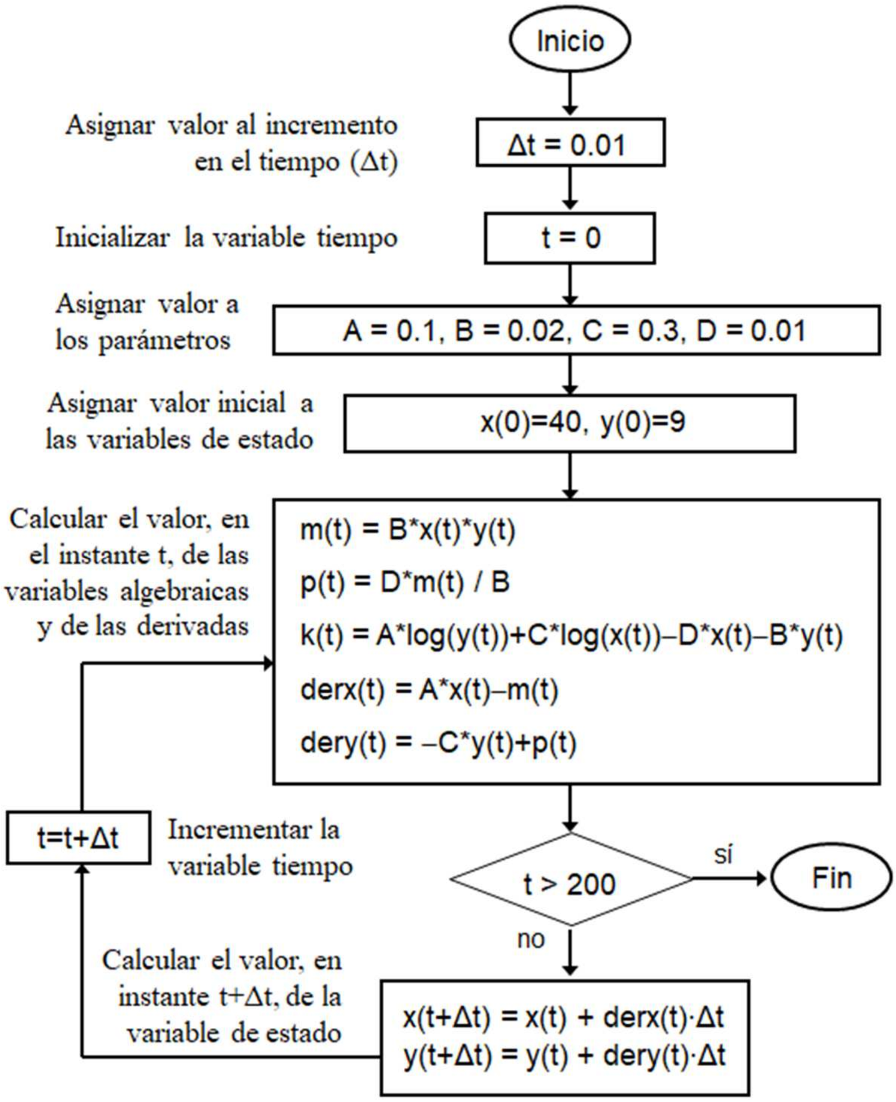

Figura 1: Diagrama de flujo de la simulación.

Pregunta 3 (4 puntos)

El circuito eléctrico representado en la Figura 2 consta de tres condensadores con capacidades $C_0 = 2e4$ F, $C_1 = 5e5$ F y $C_2 = 0.3e5$ F; cuatro resistencias con valor $R_S = 5e-3\ \Omega$, $R_1 = 1e-3\ \Omega$, $R_2 = 1.5e-3\ \Omega$ y $R_L = 0.18\ \Omega$; un interruptor ideal (nombrado Sw en el diagrama); y una fuente de corriente I. Se ha llamado u_{out} al voltaje del nodo al que están conectados la resistencia R_S, la fuente de corriente I y el interruptor Sw. El nodo tierra ($u_0 = 0$) aparece señalado en el diagrama del circuito.

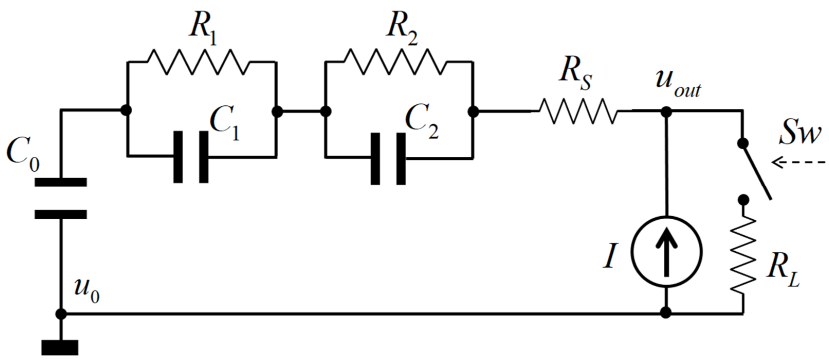

Figura 2: Diagrama del circuito eléctrico.

El circuito opera en dos modos de funcionamiento llamados “carga” y “descarga”.

- Mientras el circuito se encuentra en el modo “carga”, la fuente de corriente proporciona una corriente constante $I = I_{carga}$, donde $I_{carga} = 15$ A, y el interruptor Sw está abierto (no circula corriente a su través).
- Mientras el circuito se encuentra en el modo “descarga”, la fuente de corriente proporciona una corriente nula ($I = 0$) y el interruptor Sw está cerrado (sus pines están al mismo voltaje).

Las condiciones de conmutación entre los modos de funcionamiento son las siguientes:

- Cuando el circuito se encuentra en el modo “carga” y el voltaje u_{out} se hace mayor que un cierto valor constante $U_{max} = 3.9$ V, el circuito pasa al modo “descarga”.
- Cuando el circuito se encuentra en el modo “descarga” y el voltaje u_{out} se hace menor que un cierto valor constante $U_{min} = 3.0$ V, el circuito pasa al modo “carga”.

3.a (1 punto) Asigne nombre a los voltajes en los nodos del circuito y a las corrientes que circulan a través de los componentes. Hágalo sobre la Figura 2 (no olvide entregar las hojas de enunciado junto con su examen). A continuación, escriba las ecuaciones del modelo del circuito eléctrico. El modelo debe describir la evolución de la corriente de cada componente y del voltaje en cada nodo del circuito.

3.b (2 puntos) Escriba el modelo en Modelica, como un modelo atómico, indicando en el propio modelo la condición de inicialización descrita a continuación. En el instante inicial, el voltaje entre los bornes de los condensadores C_0, C_1 y C_2 vale 3.5 V, 0 V y 0 V respectivamente; y el sistema se encuentra en el modo "descarga".

3.c (1 punto) Modifique la descripción en Modelica de la inicialización del modelo anterior, de modo que en el instante inicial, en lugar de que el voltaje entre los bornes del condensador C_1 valga 0 V, se imponga que la corriente que circula a través de la resistencia R_1 valga 10 A.

Solución a la Pregunta 3

En la Figura 3 se muestra el nombre asignado al voltaje en los nodos y a las corrientes. El circuito eléctrico puede modelarse mediante las Ecs. (1.6) – (1.21). No se muestran las asignaciones de valor a las constantes y parámetros. El voltaje entre los bornes de los condensadores C_1 y C_2 se ha llamado u_{C1} y u_{C2} respectivamente.

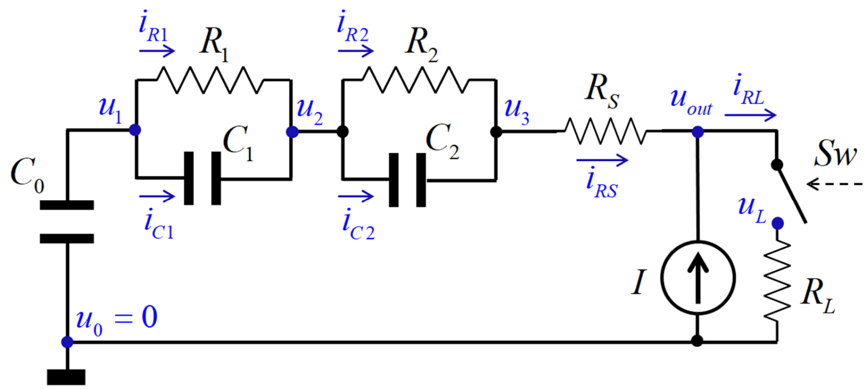

Figura 3: Nombres asignados a los voltajes en los nodos y a las corrientes.

$$C_0 \cdot \frac{du_1}{dt} = -i_{RS} \tag{1.6}$$
$$u_{C1} = u_1 - u_2 \tag{1.7}$$
$$C_1 \cdot \frac{du_{C1}}{dt} = i_{C1} \tag{1.8}$$
$$u_{C1} = i_{R1} \cdot R_1 \tag{1.9}$$
$$i_{RS} = i_{R1} + i_{C1} \tag{1.10}$$
$$u_{C2} = u_2 - u_3 \tag{1.11}$$
$$C_2 \cdot \frac{du_{C2}}{dt} = i_{C2} \tag{1.12}$$
$$u_{C2} = i_{R2} \cdot R_2 \tag{1.13}$$
$$i_{RS} = i_{R2} + i_{C2} \tag{1.14}$$
$$u_3 - u_{Out} = i_{RS} \cdot R_S \tag{1.15}$$
$$i_{RS} + I = i_{RL} \tag{1.16}$$
$$u_L = i_{RL} \cdot R_L \tag{1.17}$$
$$0 = \begin{cases} i_{RL} & \text{si } modoCarga \\ u_{Out} - u_L & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{1.18}$$
$$I = \begin{cases} I_{carga} & \text{si } modoCarga \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{1.19}$$

Las dos ecuaciones que describen el modo de funcionamiento del circuito son las siguientes:

$$\begin{aligned} modoCarga &= \text{pre}(modoDescarga) \textbf{ and } u_{Out} < U_{min} \textbf{ or} \\ &\quad \text{pre}(modoCarga) \textbf{ and not } u_{Out} > U_{max} \end{aligned} \tag{1.20}$$

$$\begin{aligned} modoDescarga &= \text{pre}(modoCarga) \textbf{ and } u_{Out} > U_{max} \textbf{ or} \\ &\quad \text{pre}(modoDescarga) \textbf{ and not } u_{Out} < U_{min} \end{aligned} \tag{1.21}$$

El modelo atómico en lenguaje Modelica se muestra en el Código 1, el cual contiene las dos condiciones de inicialización pedidas en el enunciado (la condición de la Pregunta 3.b está comentada).

```
model SistemaElectrico
  import SI = Modelica.Units.SI;
  constant SI.Voltage voltageUnit = 1;
  constant SI.Current currentUnit = 1;
  parameter SI.Capacitance C0 = 2e4, C1 = 5e5, C2 = 0.3e5;
  parameter SI.Resistance RS = 5e-3, R1 = 1e-3, R2 = 1.5e-3, RL = 0.18;
  parameter SI.Voltage Umax = 3.9, Umin = 3.0;
  parameter SI.Current Icarga = 15;

  Boolean modoCarga(start=false, fixed=true);
  Boolean modoDescarga(start=true, fixed=true);

  SI.Current iRS, iC1, iR2, iC2, iRL, I;
  SI.Voltage u1(start=3.5, fixed=true);
  SI.Voltage uC2(start=0, fixed=true);
  SI.Voltage u2, u3, uOut, uL;

  // -- Inicializacion 3.b ------
  // SI.Voltage uC1(start=0, fixed=true);
  // SI.Current iR1;
  // -- Fin Inicializacion 3.b --

  // -- Inicializacion 3.c ------
  SI.Voltage uC1;
  SI.Current iR1(start=10, fixed=true);
  // -- Fin Inicializacion 3.c --

equation
  modoCarga = pre(modoDescarga) and uOut < Umin or
              pre(modoCarga) and not uOut > Umax;
  modoDescarga = pre(modoCarga) and uOut > Umax or
                 pre(modoDescarga) and not uOut < Umin;
  // C0
  C0 * der(u1) = -iRS;
  // R1 || C1
  uC1 = u1 - u2;
  C1 * der(uC1) = iC1;
  uC1 = iR1 * R1;
  iRS = iR1 + iC1;
  // R2 || C2
  uC2 = u2 - u3;
  C2 * der(uC2) = iC2;
  uC2 = iR2 * R2;
  iRS = iR2 + iC2;
  // RS
  u3 - uOut = iRS * RS;
  // I || (Sw - RL)
  iRS + I = iRL;
  uL = iRL * RL;
  0 = if modoCarga then iRL/currentUnit else (uOut - uL)/voltageUnit;
  I = if modoCarga then Icarga else 0;
end SistemaElectrico;
```

Código 1: Modelo atómico del circuito en Modelica.

Pregunta 4 (2 puntos)

Consideremos una lámina rectangular de cobre, cuyos lados se han etiquetado L1, L2, L3 y L4 (véase la Figura 4). Los lados L1 y L3 tienen 1 m de longitud, y los lados L2 y L4 tienen 2 m de longitud. Podemos considerar el problema en dos dimensiones.

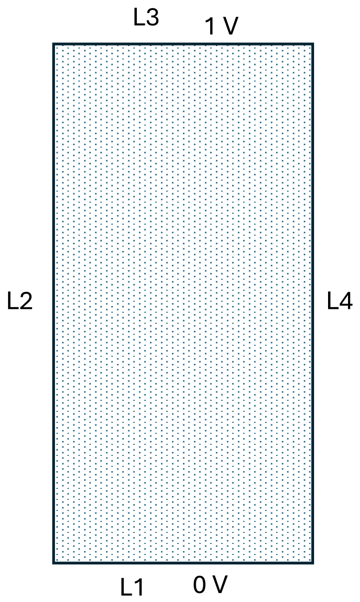

Figura 4: Lámina de cobre.

El fenómeno conductivo que tiene lugar en la lámina es descrito por la ecuación diferencial

$$-\nabla \cdot (cond \cdot \nabla U) = 0$$

donde U representa el potencial eléctrico y $cond$ la conductividad eléctrica del material. La conductividad del cobre en unidades del SI es $cond = 5.99 \cdot 10^6$.

El lado $L1$ se mantiene a un potencial de 0 V y el lado $L3$ se mantiene a 1 V. El resto de lados están bien aislados.

El campo eléctrico ($\vec{E}$) se calcula a partir del potencial mediante la ecuación siguiente:

$$\vec{E} = -\nabla U$$

Escriba un *script* en FlexPDE para obtener un gráfico de las curvas de nivel del potencial eléctrico y un gráfico vectorial del campo eléctrico.

Solución a la Pregunta 4

El *script* se muestra en el Código 2.

```
TITLE 'Conduccion en lamina Cu rectangular'
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
  U             !Potencial
SELECT
 errlim=1e-5 spectral_colors
DEFINITIONS    { definicion parametros }
 Lx=0.5 Ly=1.0 cond=5.99e7  !cond. del cu
 Ex=-dx(U) Ey = -dy(U) E=-grad(U)

EQUATIONS
  div(-cond*grad(U))=0

BOUNDARIES       { Definicion del dominio }
  REGION 'domain'      { For each material region }
    START(-Lx,0) value(U)=0 line to (Lx,0)
    natural(U)=0 line to (Lx,Ly)
    value(U)=1.0 line to (-Lx,Ly)
   natural(U)=0 line to finish
 PLOTS
  CONTOUR(U) vector(E)
END
```

Código 2: Modelo descrito en FlexPDE.