MÉTODOS DE SIMULACIÓN Y MODELADO

Solución al examen de Febrero 2024

Pregunta 1 (2 puntos)

1.a (1 punto) Cuando se simula un modelo híbrido descrito en Modelica, puede suceder que al ir resolviendo el problema de tiempo continuo se detecte en un cierto instante que se han habilitado simultáneamente varios eventos. ¿Qué criterio aplican los entornos de modelado de Modelica para decidir en qué orden se ejecutan estos eventos habilitados simultáneamente? Explíquelo detalladamente y ponga un ejemplo.

1.b (1 punto) Explique detalladamente qué significa que Modelica impone la *regla de asignación única*, y qué relación tiene dicha regla con el tratamiento de los eventos habilitados simultáneamente.

Solución a la Pregunta 1

1.a Véase la página 434 del texto base.

1.b Véase la página 434 del texto base.

Pregunta 2 (2 puntos)

A continuación se muestra un modelo matemático, donde la variable t representa el tiempo.

$$
\begin{aligned}
v_1 &= V_0 \cdot \cos\left(w \cdot t\right) \\
\frac{dx_3}{dt} - v_1 &= \beta \cdot x_2 \\
x_2 &= \alpha \cdot x_5 - v_1 \\
x_5 &= \frac{x_2 + x_4}{2} \\
x_4 \cdot \frac{dx_3}{dt} &= x_2 \cdot \frac{dx_5}{dt} \\
\frac{dx_3}{dt} &= v_3
\end{aligned}
$$

$\alpha = 12.2,\qquad \beta = 2.09,\qquad w = 4.3,\qquad V_0 = 3$

2.a (1 punto) Clasifique las variables del modelo en parámetros, variables de estado y variables algebraicas. A continuación, realice la asignación de la causalidad computacional. Explique detalladamente el procedimiento seguido para ello.

2.b (1 punto) Escriba el diagrama de flujo del algoritmo para la simulación de este modelo. Emplee el método de integración de Euler explícito. Asigne el valor inicial que desee a las variables de estado. La condición de finalización de la simulación es que el tiempo simulado alcance el valor 0.1 s.

Solución a la Pregunta 2

Las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes: α, β, w, V_0
– Variables de estado: x_3, x_5
– Variables algebraicas: v_1, v_3, x_2, x_4

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\tfrac{dx_3}{dt} \rightarrow derx3, \qquad \tfrac{dx_5}{dt} \rightarrow derx5$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= V_0 \cdot \cos(w \cdot t) && (1.1)\\
derx3 - v_1 &= \beta \cdot x_2 && (1.2)\\
x_2 &= \alpha \cdot x_5 - v_1 && (1.3)\\
x_5 &= \frac{x_2 + x_4}{2} && (1.4)\\
x_4 \cdot derx3 &= x_2 \cdot derx5 && (1.5)\\
derx3 &= v_3 && (1.6)
\end{aligned}
$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas: t
α, β, w, V_0
x_3, x_5
– Desconocidas: v_1, v_3, x_2, x_4
$derx3$, $derx5$

Con el fin de analizar si el modelo es *estructuralmente singular*, se comprueba que:

1. El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 6 ecuaciones y 6 incógnitas: v_1, v_3, x_2, x_4, $derx3$, $derx5$.

2. Cada incógnita puede emparejarse con una ecuación en que aparezca y con la cual no se haya emparejado ya otra incógnita.

$$
\begin{array}{llll}
v_1 & \rightarrow & v_1 = V_0 \cdot \cos(w \cdot t) & \text{Ec. (1.1)} \\
derx3 & \rightarrow & derx3 - v_1 = \beta \cdot x_2 & \text{Ec. (1.2)} \\
x_2 & \rightarrow & x_2 = \alpha \cdot x_5 - v_1 & \text{Ec. (1.3)} \\
x_4 & \rightarrow & x_5 = \frac{x_2 + x_4}{2} & \text{Ec. (1.4)} \\
derx5 & \rightarrow & x_4 \cdot derx3 = x_2 \cdot derx5 & \text{Ec. (1.5)} \\
v_3 & \rightarrow & derx3 = v_3 & \text{Ec. (1.6)}
\end{array}
$$

Finalmente, las ecuaciones del modelo, con la asignación de la causalidad computacional señalada, son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
[v_1] &= V_0 \cdot \cos(w \cdot t) \\
[derx3] - v_1 &= \beta \cdot x_2 \\
[x_2] &= \alpha \cdot x_5 - v_1 \\
x_5 &= \frac{x_2 + [x_4]}{2} \\
x_4 \cdot derx3 &= x_2 \cdot [derx5] \\
derx3 &= [v_3]
\end{aligned}
$$

El modelo ordenado y resuelto es el siguiente (existen otras posibles ordenaciones de las ecuaciones que son igualmente válidas):

$$
\begin{array}{rcl}
x_3, x_5 & & \text{Variables de estado} \\
[v_1] & = & V_0 \cdot \cos(w \cdot t) \\
[x_2] & = & \alpha \cdot x_5 - v_1 \\
[x_4] & = & 2 \cdot x_5 - x_2 \\
[derx3] & = & \beta \cdot x_2 + v_1 \\
[derx5] & = & \dfrac{x_4 \cdot derx3}{x_2} \\
[v_3] & = & derx3
\end{array}
$$

En la Figura 1 se muestra el diagrama de flujo para la simulación del modelo, empleando el método de integración de Euler explícito y considerando como condición de finalización que el tiempo simulado alcance el valor 0.1 s. Se han asignado valores arbitrarios a los valores iniciales de las variables de estado.

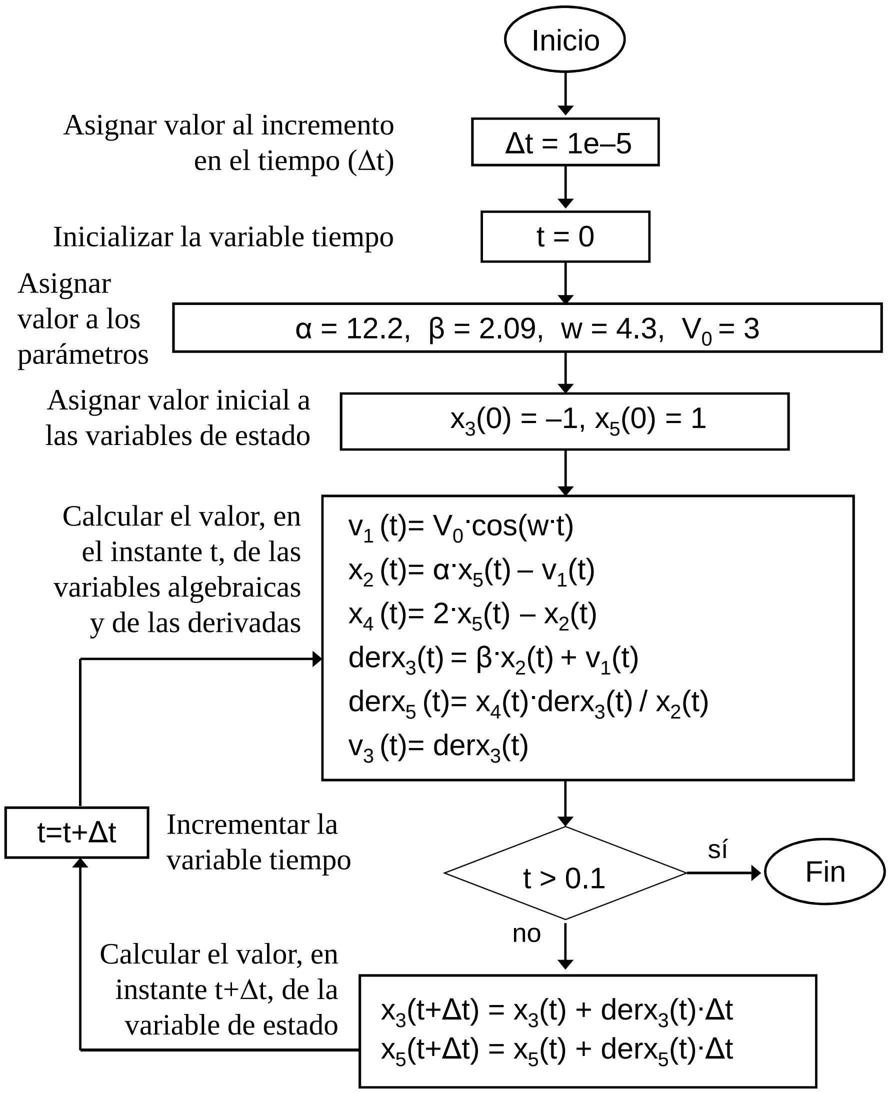

Figura 1: Diagrama de flujo de la simulación.

Pregunta 3 (4 puntos)

Consideremos el sistema eléctrico mostrado en la Figura 2, que consiste en un generador de voltaje u, dos resistencias de valor $R_1 = 100\ \Omega$ y $R_2 = 250\ \Omega$, dos condensadores de valor $C_1 = 2\ \mu F$ y $C_2 = 12\ \mu F$, y dos inducciones de valor $L_1 = 10^{-3}\ H$ y $L_2 = 3 \cdot 10^{-3} H$.

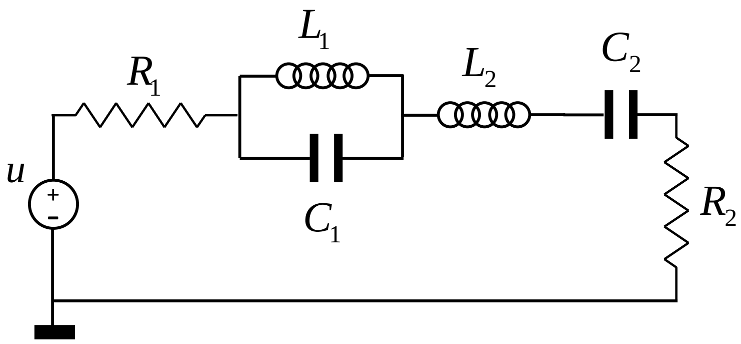

Figura 2: Diagrama del sistema eléctrico.

El voltaje producido por el generador es el siguiente:

$$u = \begin{cases} U_0 \cdot \frac{t}{t_0} & \text{si } t \leq t_0 \\ U_0 + U_1 \cdot \sin\left(w \cdot (t - t_0)\right) & \text{si } t > t_0 \end{cases}$$

donde t representa el tiempo medido en segundos, y los parámetros U_0, U_1, w y t_0 tienen los valores siguientes: $U_0 = 10\ V$, $U_1 = 0.5\ V$, $w = 7539.8\ rad/s$ y $t_0 = 0.01$ s.

3.a (1 punto) Escriba las ecuaciones del modelo del circuito eléctrico. El modelo debe describir la evolución de la corriente de cada componente y del voltaje en cada nodo del circuito. Compruebe que el número de ecuaciones es igual al número de variables desconocidas a efectos de la asignación de la causalidad computacional.

3.b (2 puntos) Describa el modelo en Modelica, como un modelo atómico.

3.c (1 punto) Suponga que desea programar en Modelica una librería eléctrica que contenga los componentes necesarios para componer el circuito de la Figura 2. Escriba el código Modelica de las siguientes clases de dicha librería: el conector que describe la interacción entre los componentes y el modelo que describe el condensador.

Solución a la Pregunta 3

En la Figura 3 se muestra el nombre que se ha asignado al voltaje en los nodos y a las corrientes. El circuito eléctrico puede modelarse mediante las Ecs. (1.7) – (1.16). No se muestran las asignaciones de valor a las constantes y parámetros. El voltaje entre los nodos de los condensadores C_1 y C_2 se ha llamado u_{C1} y u_{C2} respectivamente.

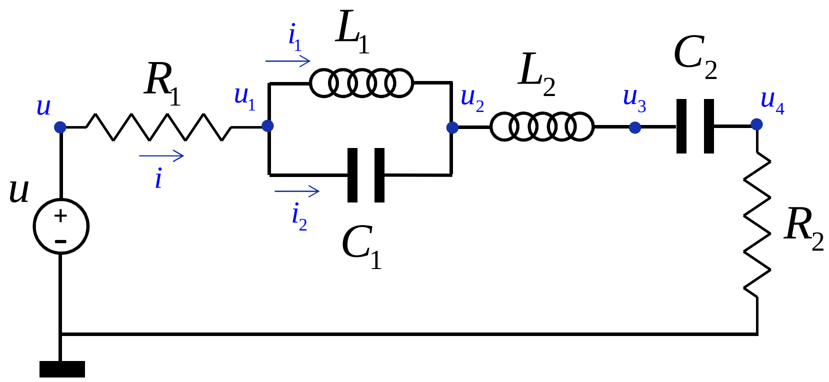

Figura 3: Nombres de los voltajes en los nodos y las corrientes.

$$u = \begin{cases} U_0 \cdot \frac{t}{t_0} & \text{si } t \le t_0 \\ U_0 + U_1 \cdot \sin\left(w \cdot (t - t_0)\right) & \text{si } t > t_0 \end{cases} \tag{1.7}$$

$$u - u_1 = i \cdot R_1 \tag{1.8}$$

$$i = i_1 + i_2 \tag{1.9}$$

$$L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} = u_1 - u_2 \tag{1.10}$$

$$u_{C1} = u_1 - u_2 \tag{1.11}$$

$$C_1 \cdot \frac{du_{C1}}{dt} = i_2 \tag{1.12}$$

$$L_2 \cdot \frac{di}{dt} = u_2 - u_3 \tag{1.13}$$

$$u_{C2} = u_3 - u_4 \tag{1.14}$$

$$C_2 \cdot \frac{du_{C2}}{dt} = i \tag{1.15}$$

$$u_4 = i \cdot R_2 \tag{1.16}$$

Asumiendo que las cuatro variables que aparecen derivadas pueden ser seleccionadas como variables de estado, las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes: R_1, R_2, C_1, C_2, L_1, L_2, U_0, U_1, $t0$, w
– Variables de estado: u_{C1}, u_{C2}, i, i_1
– Variables algebraicas: u, u_1, u_2, u_3, u_4, i_2

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{du_{C1}}{dt} \rightarrow deru_{C1}, \qquad \frac{du_{C2}}{dt} \rightarrow deru_{C2}, \qquad \frac{di}{dt} \rightarrow deri, \qquad \frac{di_1}{dt} \rightarrow deri_1$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$u = \begin{cases} U_0 \cdot \frac{t}{t_0} & \text{si } t \leq t_0 \\ U_0 + U_1 \cdot \sin\left(w \cdot (t - t_0)\right) & \text{si } t > t_0 \end{cases} \tag{1.17}$$

$$u - u_1 = i \cdot R_1 \tag{1.18}$$

$$i = i_1 + i_2 \tag{1.19}$$

$$L_1 \cdot deri_1 = u_1 - u_2 \tag{1.20}$$

$$u_{C1} = u_1 - u_2 \tag{1.21}$$

$$C_1 \cdot deru_{C1} = i_2 \tag{1.22}$$

$$L_2 \cdot deri = u_2 - u_3 \tag{1.23}$$

$$u_{C2} = u_3 - u_4 \tag{1.24}$$

$$C_2 \cdot deru_{C2} = i \tag{1.25}$$

$$u_4 = i \cdot R_2 \tag{1.26}$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas: t
R_1, R_2, C_1, C_2, L_1, L_2, U_0, U_1, $t0$, w
u_{C1}, u_{C2}, i, i_1
– Desconocidas: u, u_1, u_2, u_3, u_4, i_2
$deru_{C1}$, $deru_{C2}$, $deri$, $deri_1$

El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 10 ecuaciones y 10 incógnitas.

El modelo atómico en lenguaje Modelica se muestra en Código 1.

```
model circ "Circuito de la Pregunta 3"
  import Modelica.Units.SI;
  SI.Current i, i1, i2;
  SI.Voltage u, u1, u2, u3, u4;
  parameter SI.Resistance R1 = 100, R2 = 250;
  parameter SI.Capacitance C1 = 2e-6, C2 = 12e-6;
  parameter SI.Inductance L1 = 1e-3, L2 = 3e-3;
  parameter SI.Voltage U0 = 10, U1 = 0.5;
  parameter SI.Time t0 = 0.01;
  parameter SI.AngularFrequency w = 7539.8;
  SI.Voltage uC1, uC2;
equation
  u = if time <= t0 then U0*time/t0
                    else U0+U1*sin(w*(time-t0));
  u - u1 = i * R1;
  L1 * der(i1) = u1 - u2;
  uC1 = u1 - u2;
  C1 * der(uC1) = i2;
  L2 * der(i) = u2 - u3;
  uC2 = u3 - u4;
  C2 * der(uC2)=i;
  u4 = i*R2;
  i = i1 + i2;
end circ;
```

Código 1: Modelo atómico del circuito en Modelica.

En la Sección 2.4.2 del texto base se muestra una posible forma de declarar la interfaz y los componentes eléctricos.

Pregunta 4 (2 puntos)

En la Figura 4 se muestra un bloque rectangular de un determinado material, que tiene un hueco rectangular en su centro. Se han etiquetado los lados del bloque de L1 a L8. El bloque rectangular tiene dos lados de longitud 0.8 y 1.6 m. El hueco interior tiene forma rectangular y sus lados miden 0.1 y 0.8 m

Consideramos el problema de la distribución de calor en dos dimensiones. El fenómeno térmico que tiene lugar en el bloque se describe por la siguiente ecuación diferencial:

$$\nabla \cdot (-\kappa \cdot \nabla temp) + r_{cp} \cdot \frac{dtemp}{dt} = 0$$

donde $r_{cp} = 1$ en unidades del SI. La conductividad térmica del material (κ) depende de la temperatura ($temp$): $\kappa = 1 + \frac{10}{temp}$.

El lado $L1$ se mantiene a una temperatura constante de 373 K. Existe un flujo de calor en el lado $L3$ a una tasa constante de 100 W/m^2. El resto de lados están bien aislados. La temperatura inicial del bloque, en $t = 0$, es de 273 K.

Escriba un *script* en FlexPDE para obtener en $t = 5$ s un gráfico con las curvas de nivel de la temperatura y un gráfico vectorial del flujo de calor.

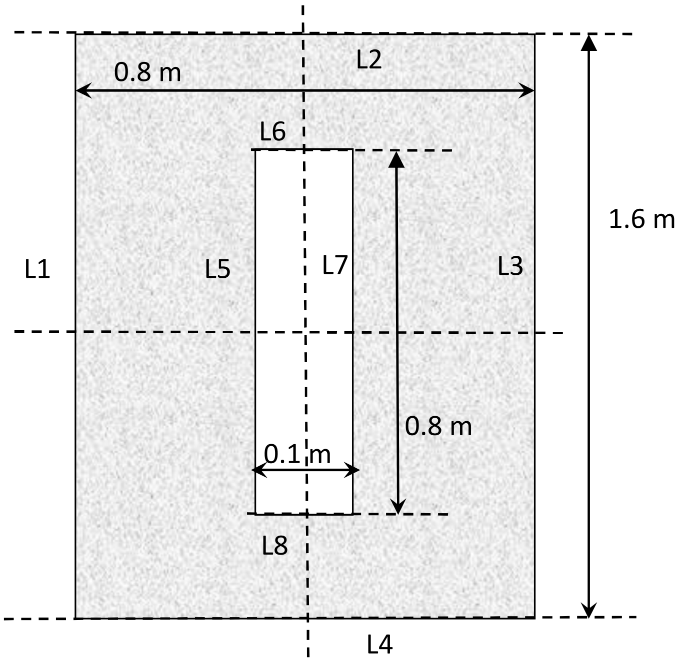

Figura 4: Sistema térmico.

Solución a la Pregunta 4

El *script* se muestra a continuación.

```
TITLE 'Bloque con cavidad' { Flujo de calor en un bloque con cavidad
   interior }
SELECT
  errlim=1e-3 spectral_colors
VARIABLES temp
DEFINITIONS
  Lx=0.4 Ly = 0.8 Cx = 0.05 Cy = 0.4
  rcp = 1
  k = 1+10/temp
  fluxd_x = -k*dx(temp) fluxd_y=-k*dy(temp)
  fluxd=vector(fluxd_x,fluxd_y)
INITIAL VALUES
  temp = 273
EQUATIONS
  div( fluxd)+ rcp*dt( temp)=0
BOUNDARIES
region 'dominio' {Define el dominio del problema}
  start (-Lx,Ly) value(temp) = 373
     line to (-Lx,-Ly)  natural(temp) = 0
     line to (Lx, -Ly)  natural(temp) = -100
     line to (Lx, Ly)   natural(temp) = 0 line to finish
 start(-Cx,Cy)   line to (-Cx,-Cy) {Region excluida}
     line to (Cx,-Cy)
     line to (Cx, Cy)
     line to finish
TIME FROM 0 TO 5 by 0.05
PLOTS
 FOR T = 5
   CONTOUR(temp)
   VECTOR(fluxd)
  END
END
```

Código 2: Modelo descrito en FlexPDE.