MÉTODOS DE SIMULACIÓN Y MODELADO

Solución al examen de Febrero 2023

PREGUNTA 1 (2 puntos)

1.a (1 punto) Explique qué análisis y manipulaciones realizan los entornos de modelado de Modelica sobre el modelo descrito en Modelica para generar el ejecutable de su simulación.

1.b (1 punto) Explique qué propósito tienen los atributos **start** y **fixed** en Modelica. Ilustre la explicación mediante ejemplos.

Solución a la Pregunta 1

1.a Véase la explicación a la Figura 3.1 del texto base.
1.b Véase la explicación de la Tabla 2.5 del texto base y de la Sección 4.6.

PREGUNTA 2 (2 puntos)

A continuación se muestra un modelo matemático, donde la variable t representa el tiempo y $\exp()$ representa la función exponencial.

$$
\begin{aligned}
m_1 \cdot \frac{dv_1}{dt} &= F_1 \\
m_1 \cdot a_1 &= F_1 \\
\frac{dv_2}{dt} &= a_2 \\
f &= a_2 + \frac{K}{m_2} \cdot (v_2 - v_1) \\
F_1 &= -K \cdot (v_1 - v_2) - D_g \cdot v_1 \\
f &= f_0 \cdot \exp\left(-\tau \cdot t\right)
\end{aligned}
$$

$m_1 = 10$	$m_2 = 20$	$f_0 = 10$
$K = 1.3 \cdot 10^{-2}$	$D_g = 0.025$	$\tau = 3.1$

2.a (1 punto) Clasifique las variables del modelo en parámetros, variables de estado y variables algebraicas. A continuación, realice la asignación de la causalidad computacional. Explique detalladamente el procedimiento seguido para ello.

2.b (1 punto) Escriba el diagrama de flujo del algoritmo para la simulación de este modelo. Emplee el método de integración de Euler explícito. Asigne el valor inicial que desee a las variables de estado. La condición de finalización de la simulación es que el tiempo simulado alcance el valor 10 s.

Solución a la Pregunta 2

Las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes: m_1, m_2, K, D_g, f_0, τ
– Variables de estado: v_1, v_2
– Variables algebraicas: a_1, a_2, F_1, f

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{dv_1}{dt} \to derv1, \qquad \frac{dv_2}{dt} \to derv2$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$m_1 \cdot derv1 = F_1 \quad (1.1)$$
$$m_1 \cdot a_1 = F_1 \quad (1.2)$$
$$derv2 = a_2 \quad (1.3)$$
$$f = a_2 + \frac{K}{m_2} \cdot (v_2 - v_1) \quad (1.4)$$
$$F_1 = -K \cdot (v_1 - v_2) - D_g \cdot v_1 \quad (1.5)$$
$$f = f_0 \cdot \exp(-\tau \cdot t) \quad (1.6)$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas: t
m_1, m_2, K, D_g, f_0, τ
v_1, v_2
– Desconocidas: a_1, a_2, F_1, f
$derv1$, $derv2$

Con el fin de analizar si el modelo es *estructuralmente singular*, se comprueba que:

1. El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 6 ecuaciones y 6 incógnitas: a_1, a_2, F_1, f, $derv1$, $derv2$.

2. Cada incógnita puede emparejarse con una ecuación en que aparezca y con la cual no se haya emparejado ya otra incógnita.

$$\begin{array}{lll l}
derv1 & \rightarrow & m_1 \cdot derv1 = F_1 & \text{Ec. (1.1)} \\
a_1 & \rightarrow & m_1 \cdot a_1 = F_1 & \text{Ec. (1.2)} \\
derv2 & \rightarrow & derv2 = a_2 & \text{Ec. (1.3)} \\
a_2 & \rightarrow & f = a_2 + \frac{K}{m_2} \cdot (v_2 - v_1) & \text{Ec. (1.4)} \\
F_1 & \rightarrow & F_1 = -K \cdot (v_1 - v_2) - D_g \cdot v_1 & \text{Ec. (1.5)} \\
f & \rightarrow & f = f_0 \cdot \exp(-\tau \cdot t) & \text{Ec. (1.6)}
\end{array}$$

Finalmente, las ecuaciones del modelo, con la asignación de la causalidad computacional señalada, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
m_1 \cdot [derv1] &= F_1 \\
m_1 \cdot [a_1] &= F_1 \\
[derv2] &= a_2 \\
f &= [a_2] + \frac{K}{m_2} \cdot (v_2 - v_1) \\
[F_1] &= -K \cdot (v_1 - v_2) - D_g \cdot v_1 \\
[f] &= f_0 \cdot \exp(-\tau \cdot t)
\end{aligned}$$

El modelo ordenado y resuelto es el siguiente (existen otras posibles ordenaciones de las ecuaciones que son igualmente válidas):

$$\begin{aligned}
[f] &= f_0 \cdot \exp(-\tau \cdot t) \\
[F_1] &= -K \cdot (v_1 - v_2) - D_g \cdot v_1 \\
[a_1] &= \frac{F_1}{m_1} \\
[a_2] &= f - \frac{K}{m_2} \cdot (v_2 - v_1) \\
[derv1] &= \frac{F_1}{m_1} \\
[derv2] &= a_2
\end{aligned}$$

En la Figura 1.1 se muestra el diagrama de flujo para la simulación del modelo, empleando el método de integración de Euler explícito y considerando como condición de finalización que el tiempo simulado alcance el valor 10 s. Se han asignado valores arbitrarios a los valores iniciales de las variables de estado.

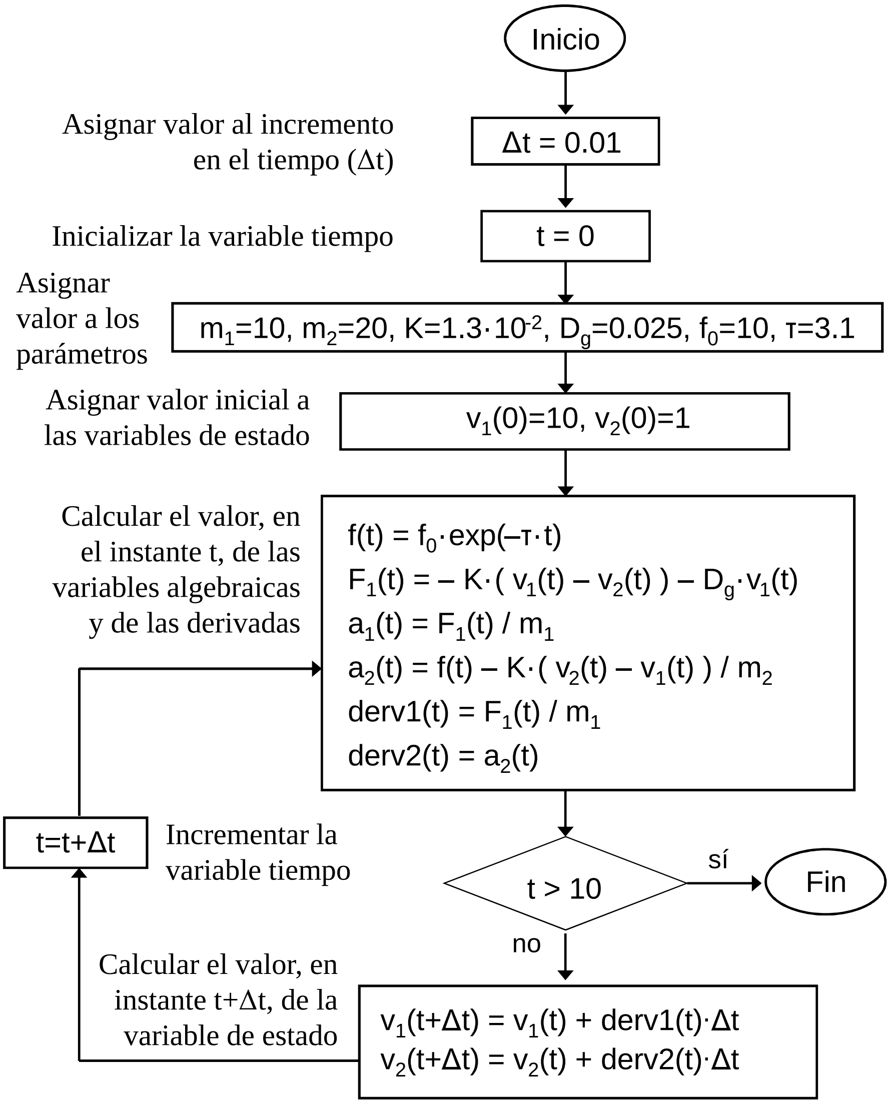

Figura 1.1: Diagrama de flujo de la simulación.

PREGUNTA 3 (4 puntos)

Consideremos el sistema mostrado en la Figura 1.2, que consiste en un objeto de masa constante m, que se encuentra suspendido del techo a través de un amortiguador, está unido al suelo a través de un muelle y roza contra la pared lateral. El suelo, el techo y la pared lateral se encuentran en reposo. El objeto puede moverse únicamente en la dirección vertical. Sobre él actúan la fuerza de la gravedad y una fuerza externa F, ambas en la dirección vertical.

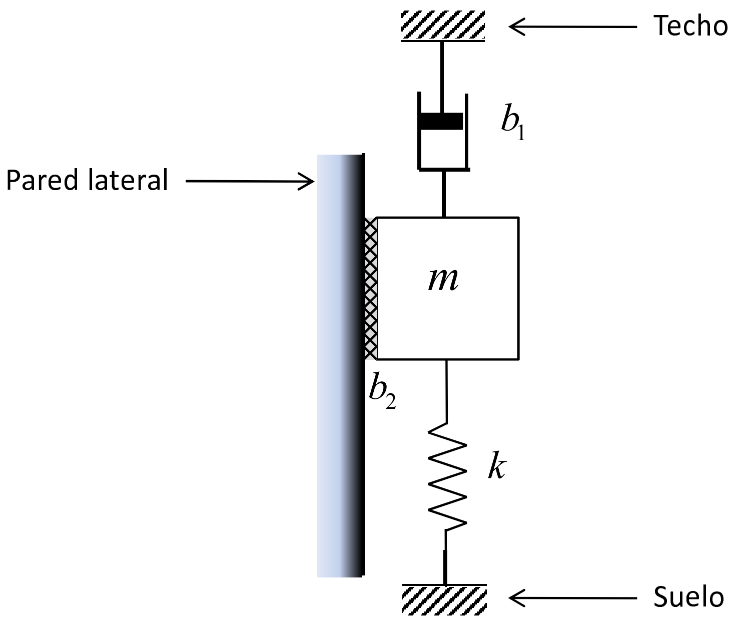

Figura 1.2: Diagrama del sistema mecánico.

Realizamos las suposiciones siguientes:

– La aceleración gravitatoria es igual a $g = 9.81$ m/s^2.

– La fuerza de fricción entre el objeto y la pared lateral es proporcional a la diferencia entre las velocidades de las superficies en contacto. El coeficiente de proporcionalidad, b_2, es un parámetro del modelo.

– El amortiguador y el muelle se comportan linealmente. El coeficiente del amortiguador (b_1) y el coeficiente del muelle (k) son parámetros de valor conocido.

– La fuerza externa F se aplica sobre el objeto en la dirección vertical, con sentido hacia arriba, y es periódica cada 60 s. En la Figura 1.3 se muestra cómo evoluciona la fuerza F a lo largo de un periodo.

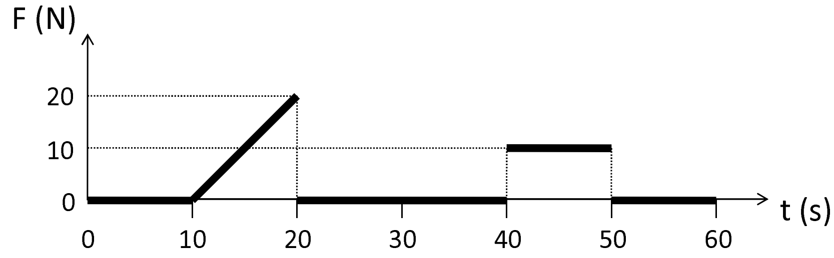

Figura 1.3: Fuerza externa F aplicada sobre el objeto en la dirección vertical.

Los parámetros del modelo se muestran en la tabla siguiente.

Símbolo	**Significado**	**Valor**	**Unidades**
m	Masa del objeto	15	kg
k	Coeficiente del muelle	250	N/m
L	Longitud natural del muelle	1.5	m
b_1	Coeficiente del amortiguador	25	N·s/m
b_2	Coeficiente de fricción	10	N·s/m
g	Aceleración gravitatoria	9.81	m/s^2

3.a (1 punto) Escriba las ecuaciones del modelo del sistema mecánico. El modelo debe describir la evolución de la longitud del muelle (x) y la velocidad del objeto (v). Adopte el criterio de signos siguiente. La velocidad (v) es positiva si la masa se desplaza hacia arriba, es decir, si aumenta la longitud del muelle (x). Asimismo, las fuerzas son positivas si tienen sentido ascendente y negativas si descendente.

Compruebe que el número de ecuaciones es igual al número de variables desconocidas a efectos de la asignación de la causalidad computacional.

3.b (2 puntos) Describa el modelo en Modelica, como un modelo atómico.

3.c Suponga que desea programar en Modelica una librería mecánica que contenga los componentes necesarios para componer el sistema mecánico de la Figura 1.2.

Escriba el código Modelica de las dos siguientes clases de dicha librería:

3.c.1 (0.5 puntos) El conector que describe la interacción entre los componentes.

3.c.2 (0.5 puntos) El modelo que describe el muelle.

Solución a la Pregunta 3

El sistema mecánico puede modelarse de la forma descrita a continuación. No se muestran las asignaciones de valor a las constantes y parámetros.

$$
\begin{aligned}
m \cdot \frac{dv}{dt} &= F_k + F_{b1} + F_{b2} + F_g + F && (1.7)\\
F_k &= -k \cdot (x - L) && (1.8)\\
F_{b1} &= -b_1 \cdot v && (1.9)\\
F_{b2} &= -b_2 \cdot v && (1.10)\\
F_g &= -m \cdot g && (1.11)\\
F &= f(t) \qquad \text{(fuerza externa, Figura 1.3)} && (1.12)\\
\frac{dx}{dt} &= v && (1.13)
\end{aligned}
$$

La variable t representa el tiempo. El parámetro L representa la longitud natural del muelle y la variable x representa la longitud actual del muelle, que coincide con la altura sobre el suelo a la que se encuentra la masa.

Las variables F_k, F_{b1}, F_{b2} y F_g representan la fuerza ejercida sobre la masa por el muelle, el amortiguador, la fricción con la pared lateral y la gravedad, respectivamente. La fuerza externa es conocida: su evolución en el tiempo se muestra en la Figura 1.3. El criterio de signos adoptado es el indicado en el enunciado.

Asumiendo que las dos variables que aparecen derivadas pueden ser seleccionadas como variables de estado, las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes: m, k, b_1, b_2, L, g
– Variables de estado: x, v
– Variables algebraicas: F_k, F_{b1}, F_{b2}, F_g, F

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\tfrac{dx}{dt} \rightarrow derx \qquad\qquad \tfrac{dv}{dt} \rightarrow derv$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$m \cdot derv = F_k + F_{b1} + F_{b2} + F_g + F \tag{1.14}$$
$$F_k = -k \cdot (x - L) \tag{1.15}$$
$$F_{b1} = -b_1 \cdot v \tag{1.16}$$
$$F_{b2} = -b_2 \cdot v \tag{1.17}$$
$$F_g = -m \cdot g \tag{1.18}$$
$$F = f(t) \tag{1.19}$$
$$derx = v \tag{1.20}$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas: t
m, k, b_1, b_2, L, g
x, v

– Desconocidas: F_k, F_{b1}, F_{b2}, F_g, F
$derx$, $derv$

El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 7 ecuaciones y 7 incógnitas.

Obsérvese la Ec. (1.18). La variable F_g se calcula de una expresión en la cual sólo intervienen constantes y parámetros. Por ello, F_g tendrá un valor constante durante toda la simulación, el cual puede calcularse en la inicialización del modelo. Se declara como parámetro en Modelica.

El modelo atómico en lenguaje Modelica se muestra en Código 1.1. El Código 1.2 contiene la declaración del conector y del muelle.

```
model ObjetoColgante
  import SI = Modelica.SIunits;
  constant SI.Acceleration g=9.81 "Aceleracion gravitatoria";
  parameter SI.Mass m=15 "Masa del objeto";
  parameter SI.TranslationalDampingConstant b1=25 "Amortiguador";
  parameter SI.TranslationalDampingConstant b2=10 "Friccion";
  parameter SI.TranslationalSpringConstant k=250 "Muelle";
  parameter SI.Length L=1.5 "Longitud natural del muelle";
  SI.Position x(start=2,fixed=true) "Longitud del muelle";
  SI.Velocity v(start=0,fixed=true) "Velocidad del objeto";
  SI.Force Fk "Fuerza ejercida por el muelle";
  SI.Force Fb1 "Fuerza ejercida por el amortiguador";
  SI.Force Fb2 "Fuerza ejercida por la friccion";
  SI.Force F   "Fuerza externa";
  parameter SI.Force Fg = -m*g "Fuerza gravitatoria";
equation
  m*der(v) = Fk + Fb1 + Fb2 + Fg + F;
  Fk = -k*(x - L);
  Fb1 = -b1*v;
  Fb2 = -b2*v;
  der(x) = v;
  F = if rem(time,60) > 10 and rem(time,60) < 20
      then 2*(rem(time,60) - 10)
      elseif rem(time,60) > 40 and rem(time,60) < 50
          then 10
          else 0;
end ObjetoColgante;
```

Código 1.1: Pregunta 3.b: modelo atómico del sistema mecánico.

```
connector Port "Posicion / Fuerza"
   Modelica.SIunits.Position x;
   flow Modelica.SIunits.Force f;
end Port;

model Muelle "Muelle ideal"
   Port p1;
   Port p2;
   parameter Real K(unit="N/m") = 1 "Coef. restitucion";
   parameter Modelica.SIunits.Length longNat=1 "Longitud natural";
protected
   Modelica.SIunits.Length long "longitud";
equation
   long = p2.x - p1.x;
   p1.f = K*(long - longNat);
   p2.f = -p1.f;
end Muelle;
```

Código 1.2: Pregunta 3.c: conector y muelle.

PREGUNTA 4 (2 puntos)

Escriba un *script* en FlexPDE para obtener las líneas equipotenciales y los vectores del campo eléctrico del sistema descrito a continuación.

El sistema es un condensador formado por dos electrodos paralelos de longitud 10 m, que están situados en $y = 0$ e $y = 1$ m. El electrodo situado en $y = 0$ se extiende desde $x = 0$ a $x = 10$ m, y está a un voltaje de 0 V. El electrodo superior está a un voltaje de 10 V. Suponemos que no existen efectos debidos a los bordes y que el campo eléctrico tanto en $x = 0$ como en $x = 10$ m está dirigido verticalmente.

En el interior del condensador existe un medio de permitividad relativa (ϵ_r) de valor 2, excepto en una zona donde hay un medio de permitividad relativa (ϵ_r) 50. Esta zona está delimitada por un semicírculo de radio 0.3 m y cuyo centro está en las coordenadas $(4, 0.5)$ expresadas en metros. La permitividad del medio (ϵ) se calcula a partir de la expresión $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$, siendo el valor de ϵ_0 igual a $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

La geometría de este problema se muestra en la Figura 1.4. Este fenómeno se describe mediante la siguiente ecuación diferencial, donde V es el voltaje:

$$\nabla \cdot (-\epsilon \cdot \nabla V) = 0$$

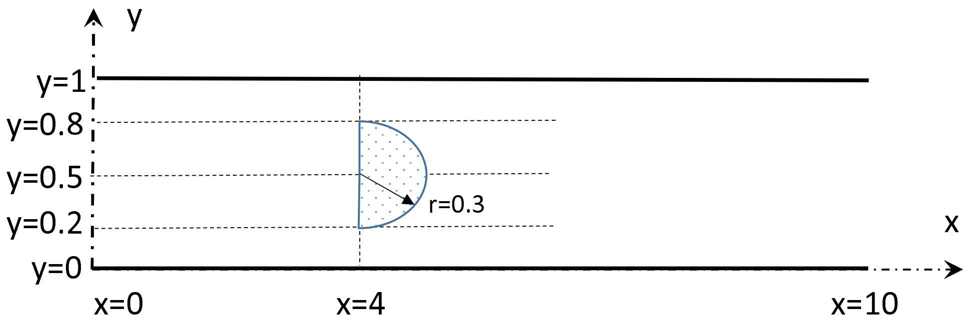

Figura 1.4: Condensador.

Solución a la Pregunta 4

El *script* se muestra a continuación.

```
TITLE
'Potencial y Campo Electrico'
VARIABLES
V
DEFINITIONS
eps0 =8.85e-12
eps =2
EQUATIONS
V:   div(eps0*eps*grad(V)) = 0        {Ecuacion potencial }
BOUNDARIES
REGION 1
START(0,0)
VALUE(V) = 0  LINE TO (10,0)
NATURAL(V) = 0  LINE TO (10,1)
VALUE(V) = 10  LINE TO (0,1)
NATURAL(V) = 0  LINE TO CLOSE
region 2
eps =50
start (4,0.8)
arc (center=4,0.5) angle=-180
START(4,0.8) LINE TO (4,0.2)
PLOTS
CONTOUR(V) AS 'Potencial'
VECTOR(-dx(V),-dy(V)) AS 'Campo electrico'
END
```