MÉTODOS DE SIMULACIÓN Y MODELADO

Solución al examen de Febrero 2020

PREGUNTA 1 (2 puntos)

Responda a las preguntas siguientes.

1.a (1 punto) Explique para qué sirve la función **pre** de Modelica. Ponga un ejemplo de un modelo en Modelica en que se use dicha función.

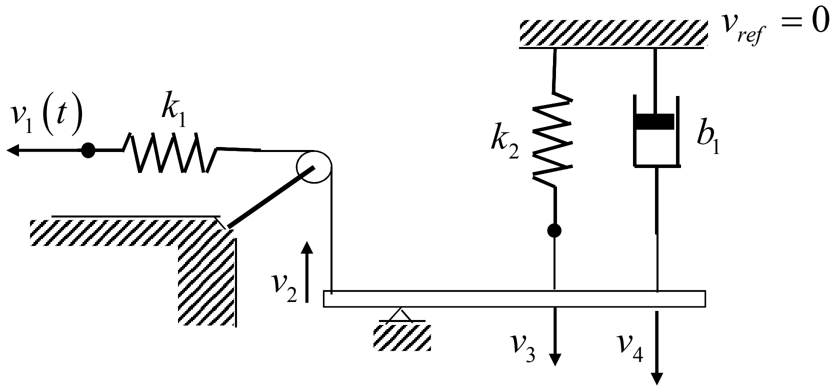
1.b (1 punto) Explique para qué sirve la **sentencia if** en Modelica. Además, explique y describa en Modelica un modelo en el cual se emplee dicha sentencia.

Solución a la Pregunta 1

1.a Véase la Sección 4.5 del texto base.
1.b Véase la Sección Sección 4.5.1 del texto base.

PREGUNTA 2 (2 puntos)

En la figura situada a continuación se muestra un sistema compuesto por dos muelles, un amortiguador, una polea y una palanca.



Se supone que las masas de la polea y la palanca son despreciables, y que los muelles y el amortiguador se comportan linealmente. La velocidad v_1 es una función conocida del tiempo.

Las distancias de los brazos de la palanca, medidas desde el punto de apoyo de la palanca hasta los puntos cuyas velocidades están señaladas como v_2, v_3 y v_4, son L_2, L_3 y L_4 respectivamente. Sean F_2, F_3 y F_4 las fuerzas ejercidas por los muelles y el amortiguador en los puntos en los cuales están señaladas las velocidades v_2, v_3 y v_4 respectivamente.

El criterio de signos para el sentido de la velocidad está señalado en la figura. El criterio de signos para el sentido de la fuerza es el mismo que hay dibujado en la figura para las respectivas velocidades.

Se ha modelado el sistema mediante las ecuaciones escritas a continuación. Se ha llamado e_1 y e_2 a la diferencia entre la longitud actual y la longitud natural de los muelles cuyas constantes son k_1 y k_2, respectivamente. La variable t representa el tiempo.

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \begin{cases} V_{10} \cdot \sin(w \cdot t) & \text{si } 2 < t < 20 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\
F_2 &= k_1 \cdot e_1 \\
\frac{de_1}{dt} &= v_1 - v_2 \\
F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot L_3 + F_4 \cdot L_4 &= 0 \\
\frac{v_2}{L_2} &= \frac{v_3}{L_3} \\
\frac{v_2}{L_2} &= \frac{v_4}{L_4} \\
F_3 &= -k_2 \cdot e_2 \\
\frac{de_2}{dt} &= v_3 \\
F_4 &= -b_1 \cdot v_4
\end{aligned}
$$

Las distancias de los brazos de la palanca son parámetros del modelo, a los que se asigna los valores siguientes: $L_2 = 1$ m, $L_3 = 2$ m, $L_4 = 3$ m. También son parámetros del modelo las constantes de los muelles, $k_1 = 5$ N/m, $k_2 = 10$ N/m, y la constante del amortiguador, $b_1 = 5$ N·s/m. La velocidad v_1 depende de los parámetros $V_{10} = 0.01$ m/s, $w = 1$ rad/s.

2.a (1 punto) Clasifique las variables del modelo en parámetros, variables de estado y variables algebraicas. A continuación, realice la asignación de la causalidad computacional. Explique detalladamente el procedimiento seguido para ello.

2.b (1 punto) Escriba el diagrama de flujo del algoritmo para la simulación de este modelo. Emplee el método de integración de Euler explícito. Asigne el valor inicial que desee a las variables de estado. La condición de finalización de la simulación es que el tiempo simulado alcance el valor 25 s.

Solución a la Pregunta 2

Las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes:	L_2, L_3, L_4, k_1, k_2, b_1, V_{10}, w
– Variables de estado:	e_1, e_2
– Variables algebraicas:	v_1, v_2, v_3, v_4, F_2, F_3, F_4

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{de_1}{dt} \rightarrow dere1, \qquad \frac{de_2}{dt} \rightarrow dere2$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$v_1 = \begin{cases} V_{10} \cdot \sin(w \cdot t) & \text{si } 2 < t < 20 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$F_2 = k_1 \cdot e_1 \tag{1.2}$$

$$dere1 = v_1 - v_2 \tag{1.3}$$

$$F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot L_3 + F_4 \cdot L_4 = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{v_2}{L_2} = \frac{v_3}{L_3} \tag{1.5}$$

$$\frac{v_2}{L_2} = \frac{v_4}{L_4} \tag{1.6}$$

$$F_3 = -k_2 \cdot e_2 \tag{1.7}$$

$$dere2 = v_3 \tag{1.8}$$

$$F_4 = -b_1 \cdot v_4 \tag{1.9}$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas:	t
	L_2, L_3, L_4, k_1, k_2, b_1, V_{10}, w
	e_1, e_2
– Desconocidas:	v_1, v_2, v_3, v_4, F_2, F_3, F_4
	$dere1$, $dere2$

La matriz de incidencia original se muestra a continuación. La Ec. (1.1) es representada como $v_1 = f(t)$, para indicar que v_1 es una función conocida del tiempo.

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccccccccc} dere_1 & dere_2 & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & F_2 & F_3 & F_4 \end{array} \\
\begin{array}{r}
v_1{=}f(t) \\
F_2{=}k_1{\cdot}e_1 \\
dere_1{=}v_1{-}v_2 \\
F_2{\cdot}L_2{+}F_3{\cdot}L_3{+}F_4{\cdot}L_4{=}0 \\
\frac{v_2}{L_2}{=}\frac{v_3}{L_3} \\
\frac{v_2}{L_2}{=}\frac{v_4}{L_4} \\
F_3{=}{-}k_2{\cdot}e_2 \\
dere_2{=}v_3 \\
F_4{=}{-}b_1{\cdot}v_4
\end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\
X & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & X \\
0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 \\
0 & X & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & X
\end{pmatrix}
\end{array}
\tag{1.10}
$$

Con el fin de analizar si el modelo es *estructuralmente singular*, se comprueba que:

1. El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 9 ecuaciones y 9 incógnitas: v_1, v_2, v_3, v_4, F_2, F_3, F_4, $dere1$, $dere2$.

2. Cada incógnita puede emparejarse con una ecuación en que aparezca y con la cual no se haya emparejado ya otra incógnita. Esto es equivalente a encontrar una secuencia de permutaciones de las columnas de la matriz de incidencia que permita obtener aspas en todos los elementos diagonales de la matriz permutada. Ésta se muestra a continuación.

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccccccccc} v_1 & F_2 & dere_1 & F_4 & v_3 & v_2 & F_3 & dere_2 & v_4 \end{array} \\
\begin{array}{r}
v_1{=}f(t) \\
F_2{=}k_1{\cdot}e_1 \\
dere_1{=}v_1{-}v_2 \\
F_2{\cdot}L_2{+}F_3{\cdot}L_3{+}F_4{\cdot}L_4{=}0 \\
\frac{v_2}{L_2}{=}\frac{v_3}{L_3} \\
\frac{v_2}{L_2}{=}\frac{v_4}{L_4} \\
F_3{=}{-}k_2{\cdot}e_2 \\
dere_2{=}v_3 \\
F_4{=}{-}b_1{\cdot}v_4
\end{array} &
\begin{pmatrix}
X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
X & 0 & X & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\
0 & X & 0 & X & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & X \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & X & 0 \\
0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & X
\end{pmatrix}
\end{array}
\tag{1.11}
$$

Por tanto, el modelo no es estructuralmente singular. La causalidad computacional se asigna razonando de la manera descrita a continuación.

1. En la Ec. (1.1) hay una única variable desconocida: v_1. Lo mismo sucede con F_2 en Ec. (1.2), y con F_3 en Ec. (1.7). Por tanto, estas variables deben ser calculadas de esas ecuaciones. Como estas tres incógnitas intervienen en otras ecuaciones, son movidas a las primeras columnas de la matriz y las tres ecuaciones a las primeras filas.

   La variable $dere_1$ aparece sólo en una ecuación: Ec. (1.3). Lo mismo sucede con $dere_2$, la cual aparece únicamente en una de las ecuaciones del modelo: la Ec. (1.8). En consecuencia, estas variables deben ser calculadas de estas ecuaciones. Puesto que estas incógnitas no intervienen en ninguna otra ecuación del modelo, son movidas a las últimas columnas y las ecuaciones a las últimas filas.

$$
\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{ccccccccc} v_1 & F_2 & F_3 & v_2 & v_3 & v_4 & F_4 & dere_1 & dere_2 \end{array} \\
\begin{array}{r} v_1=f(t) \\ F_2=k_1\cdot e_1 \\ F_3=-k_2\cdot e_2 \\ F_2\cdot L_2+F_3\cdot L_3+F_4\cdot L_4=0 \\ \frac{v_2}{L_2}=\frac{v_3}{L_3} \\ \frac{v_2}{L_2}=\frac{v_4}{L_4} \\ F_4=-b_1\cdot v_4 \\ dere_1=v_1-v_2 \\ dere_2=v_3 \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccccc}
\boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & X & X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & X & 0 & X & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 \\
X & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & \boxed{X} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & 0 & \boxed{X}
\end{array}\right)
\end{array}
\tag{1.12}
$$

2. Asumiendo que F_2 y F_3 son calculadas de las Ecs. (1.2) y (1.7) respectivamente, la Ec. (1.4) contiene únicamente una variable desconocida que todavía no ha sido calculada: la variable F_4. Por tanto, F_4 es calculada de la Ec. (1.4). Como esta variable intervienen en otras ecuaciones, se mueve a la cuarta columna y la ecuación se mueve a la cuarta fila.

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccccc} v_1 & F_2 & F_3 & F_4 & v_2 & v_3 & v_4 & dere_1 & dere_2 \end{array} \\
\begin{array}{r}
v_1 = f(t) \\
F_2 = k_1 \cdot e_1 \\
F_3 = -k_2 \cdot e_2 \\
F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot L_3 + F_4 \cdot L_4 = 0 \\
\frac{v_2}{L_2} = \frac{v_3}{L_3} \\
\frac{v_2}{L_2} = \frac{v_4}{L_4} \\
F_4 = -b_1 \cdot v_4 \\
dere_1 = v_1 - v_2 \\
dere_2 = v_3
\end{array} &
\begin{pmatrix}
\boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & X & X & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & X & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & X & 0 & 0 \\
X & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & \boxed{X} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & 0 & \boxed{X}
\end{pmatrix}
\end{array}
\tag{1.13}
$$

3. Asumiendo que F_4 se calcula de la Ec. (1.4), la Ec. (1.9) sólo contiene una variable desconocida que no ha sido calculada aun: la variable v_4. Por tanto, v_4 es calculada de Ec. (1.9).

$$
\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccccccccc} v_1 & F_2 & F_3 & F_4 & v_4 & v_2 & v_3 & dere_1 & dere_2 \end{array} \\
\begin{array}{r}
v_1 = f(t) \\
F_2 = k_1 \cdot e_1 \\
F_3 = -k_2 \cdot e_2 \\
F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot L_3 + F_4 \cdot L_4 = 0 \\
F_4 = -b_1 \cdot v_4 \\
\frac{v_2}{L_2} = \frac{v_3}{L_3} \\
\frac{v_2}{L_2} = \frac{v_4}{L_4} \\
dere_1 = v_1 - v_2 \\
dere_2 = v_3
\end{array} &
\begin{pmatrix}
\boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & X & X & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & X & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & X & X & 0 & 0 & 0 \\
X & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & \boxed{X} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & \boxed{X}
\end{pmatrix}
\end{array}
\tag{1.14}
$$

4. Asumiendo que v_4 es calculada de la Ec. (1.9), la Ec. (1.6) sólo contiene una variable desconocida que no ha sido calculada aun: la variable v_2. Por tanto, la variable v_2 es calculada de la Ec. (1.6). A continuación se muestra la matriz de incidencia en forma BLT.

$$
\begin{array}{r|ccccccccc}
 & v_1 & F_2 & F_3 & F_4 & v_4 & v_2 & v_3 & dere_1 & dere_2 \\
\hline
v_1{=}f(t) & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
F_2{=}k_1{\cdot}e_1 & 0 & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
F_3{=}{-}k_2{\cdot}e_2 & 0 & 0 & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
F_2{\cdot}L_2{+}F_3{\cdot}L_3{+}F_4{\cdot}L_4{=}0 & 0 & X & X & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
F_4{=}{-}b_1{\cdot}v_4 & 0 & 0 & 0 & X & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{v_2}{L_2}{=}\frac{v_4}{L_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & X & \boxed{X} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{v_2}{L_2}{=}\frac{v_3}{L_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & \boxed{X} & 0 & 0 \\
dere_1{=}v_1{-}v_2 & X & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & \boxed{X} & 0 \\
dere_2{=}v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & X & 0 & \boxed{X}
\end{array}
\qquad (1.15)
$$

A continuación se muestra el modelo ordenado, con la causalidad computacional anotada.

$$
\begin{aligned}
[v_1] &= \begin{cases} V_{1,0} \cdot \sin(w \cdot t) & \text{si } 2 < t < 20 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} && (1.16) \\
[F_2] &= k_1 \cdot e_1 && (1.17) \\
[F_3] &= -k_2 \cdot e_2 && (1.18) \\
F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot L_3 + [F_4] \cdot L_4 &= 0 && (1.19) \\
F_4 &= -b_1 \cdot [v_4] && (1.20) \\
\frac{[v_2]}{L_2} &= \frac{v_4}{L_4} && (1.21) \\
\frac{v_2}{L_2} &= \frac{[v_3]}{L_3} && (1.22) \\
[dere_1] &= v_1 - v_2 && (1.23) \\
[dere_2] &= v_3 && (1.24)
\end{aligned}
$$

Finalmente, a continuación se muestra el modelo ordenado y resuelto.

$$[v_1] = \begin{cases} V_{1,0} \cdot \sin(w \cdot t) & \text{si } 2 < t < 20 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (1.25)$$

$$[F_2] = k_1 \cdot e_1 \quad (1.26)$$

$$[F_3] = -k_2 \cdot e_2 \quad (1.27)$$

$$[F_4] = \frac{-1}{L_4} \cdot (F_2 \cdot L_2 + F_3 \cdot L_3) \quad (1.28)$$

$$[v_4] = \frac{-F_4}{b_1} \quad (1.29)$$

$$[v_2] = \frac{L_2}{L_4} \cdot v_4 \quad (1.30)$$

$$[v_3] = \frac{L_3}{L_2} \cdot v_2 \quad (1.31)$$

$$[dere_1] = v_1 - v_2 \quad (1.32)$$

$$[dere_2] = v_3 \quad (1.33)$$

El algoritmo de la simulación, empleando el algoritmo de Euler explícito, se muestra en la Figura 1.1.

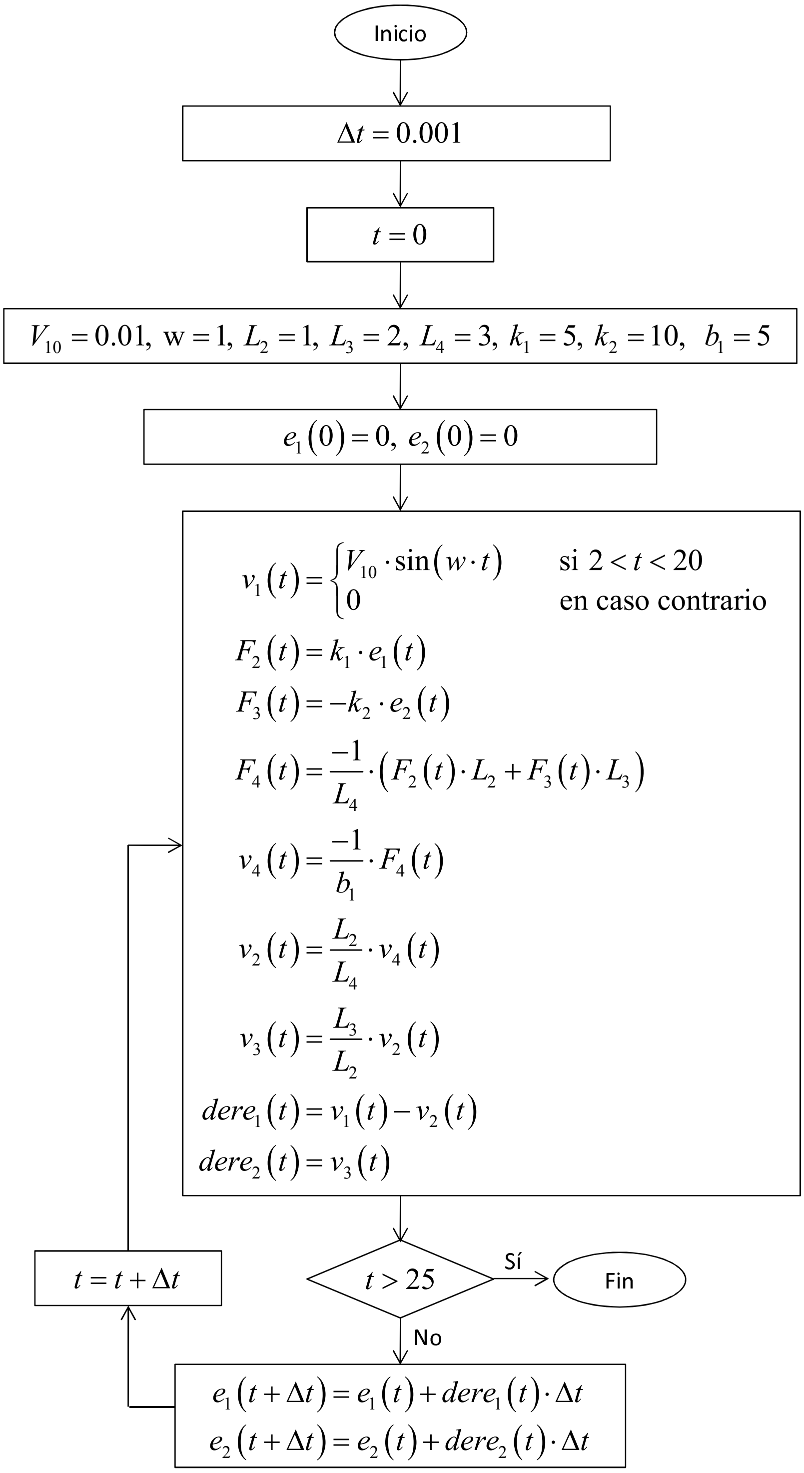


Figura 1.1: Algoritmo para la simulación del sistema mecánico.

PREGUNTA 3 (4 puntos)

3.a (2 puntos) Describa como un modelo atómico en Modelica el sistema mecánico descrito en la pregunta anterior. Inicialice el modelo asignando los valores que desee a sus variables de estado.

3.b (2 puntos) Escriba una librería en Modelica que contenga los componentes necesarios para componer el sistema mecánico descrito en la pregunta anterior. A continuación, emplee los componentes de su librería para componer en Modelica el modelo del sistema.

Solución a la Pregunta 3

La descripción en Modelica del modelo atómico del sistema mecánico se muestra en el Código 1.1.

En el Código 1.2 y 1.3 se define la librería con los componentes necesarios para componer el sistema mecánico, así como el sistema mecánico compuesto empleando dichos componentes.

```
model SistemaMecanico
  import SI = Modelica.SIunits;
  // Parametros de la velocidad v1
  parameter SI.Velocity V10=0.01;
  parameter SI.AngularFrequency w=1;
  // Distancias entre las fuerzas y el punto de apoyo
  parameter SI.Length L2=1;
  parameter SI.Length L3=2;
  parameter SI.Length L4=3;
  // Muelles y amortiguador
  parameter SI.TranslationalSpringConstant k1=5;
  parameter SI.TranslationalSpringConstant k2=10;
  parameter SI.TranslationalDampingConstant b1=5;
  SI.Length e1(start=0,fixed=true);
  SI.Length e2(start=0,fixed=true);
  SI.Velocity v1;
  SI.Velocity v2;
  SI.Velocity v3;
  SI.Velocity v4;
  SI.Force F2;
  SI.Force F3;
  SI.Force F4;
equation
  // Velocidad impuesta sobre el extremo izquierdo del muelle 1
  v1 = if time > 2 and time < 20 then V10*sin(w*time) else 0;
  // Muelle 1
  F2 = k1*e1;
  der(e1) = v1 - v2;
  // Palanca
  F2*L2 + F3*L3 + F4*L4 = 0;
  v2/L2 = v3/L3;
  v2/L2 = v4/L4;
  // Muelle 2
  F3 = -k2*e2;
  der(e2) = v3;
  // Amortiguador
  F4 = -b1*v4;
  annotation (uses(Modelica(version="3.2.2")));
end SistemaMecanico;
```

Código 1.1: Modelo atómico en Modelica del sistema mecánico.

```
package Mecanica

import SI = Modelica.SIunits;

package Interfaz

connector Port
  SI.Velocity    v;
  flow SI.Force  F;
end Port;

end Interfaz;

package Componentes

model Muelle
   Interfaz.Port p,n;
   parameter SI.TranslationalSpringConstant k;
   parameter SI.Length eInicial;
   SI.Length e(start=eInicial,fixed=true);
equation
   der(e) = p.v - n.v;
   p.F = -k*e;
   n.F = -p.F;
end Muelle;

model Amortiguador
   Interfaz.Port p,n;
   parameter SI.TranslationalDampingConstant b;
equation
   p.F = -b*(p.v - n.v);
   n.F = -p.F;
end Amortiguador;

model Palanca
   Interfaz.Port p2,p3,p4;
   parameter SI.Length L2;
   parameter SI.Length L3;
   parameter SI.Length L4;
equation
   p2.F*L2 + p3.F*L3 + p4.F*L4 = 0;
   p2.v/L2 = p3.v/L3;
   p2.v/L2 = p4.v/L4;
end Palanca;

model ReferenciaV
   Interfaz.Port p;
equation
   p.v = 0;
end ReferenciaV;
```

Código 1.2: Librería para el modelado del sistema mecánico (1/2).

```
model FuenteV
  Interfaz.Port p;
  parameter SI.Time T1,T2;
  parameter SI.Velocity V10;
  parameter SI.AngularFrequency w;
equation
  p.v = if time > T1 and time < T2 then V10*sin(w*time) else 0;
end FuenteV;

end Componentes;



model SistemaMecanico
  // Parametros de la velocidad v1
  parameter SI.Velocity V10=0.01;
  parameter SI.AngularFrequency w=1;
  parameter SI.Time T1 = 2;
  parameter SI.Time T2 = 20;
  // Distancias entre las fuerzas y el punto de apoyo
  parameter SI.Length L2=1;
  parameter SI.Length L3=2;
  parameter SI.Length L4=3;
  //Muelles y amortiguador
  parameter SI.TranslationalSpringConstant  k1=5;
  parameter SI.TranslationalSpringConstant  k2=10;
  parameter SI.TranslationalDampingConstant b1=5;
  // Elongaciones iniciales
  parameter SI.Length eInicial1 = 0;
  parameter SI.Length eInicial2 = 0;

  // Componentes
   Componentes.Muelle       muelle1(k=k1,eInicial=eInicial1);
   Componentes.Muelle       muelle2(k=k2,eInicial=eInicial2);
   Componentes.Amortiguador amortiguador(b=b1);
   Componentes.Palanca      palanca(L2=L2,L3=L3,L4=L4);
   Componentes.ReferenciaV  referenciaV;
   Componentes.FuenteV      fuenteV(T1=T1,T2=T2,V10=V10,w=w);

equation
   connect( referenciaV.p,amortiguador.n);
   connect( referenciaV.p,muelle2.n);
   connect( palanca.p3,muelle2.p);
   connect( palanca.p4,amortiguador.p);
   connect( palanca.p2,muelle1.n);
   connect( fuenteV.p,muelle1.p);
end SistemaMecanico;

annotation (uses(Modelica(version="3.2.2")));
end Mecanica;
```

Código 1.3: Librería para el modelado del sistema mecánico (2/2).

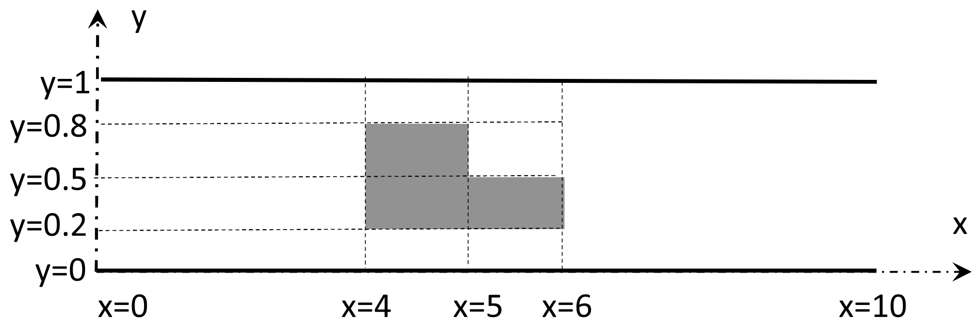
PREGUNTA 4 (2 puntos)

Escriba un *script* en FlexPDE para obtener las líneas equipotenciales y los vectores del campo eléctrico del sistema descrito a continuación.

El sistema es un condensador formado por dos electrodos paralelos, situados en $y = 0$ e $y = 1$, de longitud 10 m. El electrodo situado en $y = 0$ se extiende desde $x = 0$ a $x = 10$ y está a un voltaje de 0 V. El electrodo superior está a un voltaje de 10 V. Suponemos que no existen efectos debidos a los bordes y que el campo eléctrico tanto en $x = 0$ como en $x = 10$ está dirigido verticalmente.

En el interior del condensador existe un medio de permitividad relativa (ϵ_r) de valor 2, excepto en una zona donde hay un medio de permitividad relativa (ϵ_r) 50. Esta zona está delimitada por un polígono con vértices en las coordenadas siguientes: (4, 0.2), (4, 0.8), (5, 0.8), (5, 0.5), (6, 0.5) y (6, 0.2). La permitividad del medio (ϵ) se calcula a partir de la expresión $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$, siendo el valor de ϵ_0 igual a $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

La geometría de este problema se muestra en la figura siguiente.



Este fenómeno se describe por la ecuación mostrada a continuación, en la cual V es el voltaje.

$$\nabla \cdot (-\epsilon \cdot \nabla V) = 0$$

Solución a la Pregunta 4

El *script* se muestra a continuación.

```
TITLE
'Potencial y Campo Electrico'
VARIABLES
V
DEFINITIONS
eps0 = 8.85e-12
eps = 2
EQUATIONS
V:    div(eps0*eps*grad(V)) = 0          { Ecuacion potencial }
BOUNDARIES
REGION 1
START(0,0)
VALUE(V) = 0  LINE TO (10,0)
NATURAL(V) = 0  LINE TO (10,1)
VALUE(V) = 10  LINE TO (0,1)
NATURAL(V) = 0  LINE TO CLOSE
region 2
eps = 50
START (4,0.2)
LINE TO (4,0.8) TO (5,0.8) TO (5,0.5)
TO (6,0.5) TO (6,0.2)    TO CLOSE
PLOTS
CONTOUR(V) AS  'Potencial'
VECTOR(-dx(V),-dy(V)) AS  'Campo electrico'
END
```