MÉTODOS DE SIMULACIÓN Y MODELADO

Solución al examen de Febrero 2019

PREGUNTA 1 (2 puntos)

Responda a las preguntas siguientes.

1.a (1 punto) Explique qué significado tienen en el lenguaje Modelica los atributos **start** y **fixed**.

1.b (1 punto) Explique en qué consiste el *paradigma del modelado físico*.

Solución a la Pregunta 1

1.a Véase la Tabla 2.5 del texto base.
1.b Véase la Sección 2.2.1 del texto base.

PREGUNTA 2 (2 puntos)

A continuación se muestra un modelo matemático, donde la variable t representa el tiempo.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} - a_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} &= b_2 \\
b_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_3 &= b_2 \cdot \frac{dx_2}{dt} \\
x_2 &= b_1 \cdot x_1 - \frac{dx_1}{dt} \\
x_3 &= x_4 - x_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l|l}
a_1 = 7.65 \cdot 10^{-3} & a_2 = \frac{2}{3} \cdot a_1 \\
b_1 = 4.07 \cdot 10^{-2} & b_2 = b_1 \cdot t
\end{array}
$$

2.a (1 punto) Clasifique las variables del modelo en parámetros, variables de estado y variables algebraicas. A continuación, realice la asignación de la causalidad computacional. Explique detalladamente el procedimiento seguido para ello.

2.b (1 punto) Escriba el diagrama de flujo del algoritmo para la simulación de este modelo. Emplee el método de integración de Euler explícito. Asigne el valor inicial que desee a las variables de estado. La condición de finalización de la simulación es que el tiempo simulado alcance el valor 10 s.

Solución a la Pregunta 2

Las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes: a_1, a_2, b_1
– Variables de estado: x_1, x_2
– Variables algebraicas: b_2, x_3, x_4

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{dx_1}{dt} \to derx1, \qquad \frac{dx_2}{dt} \to derx2$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$\begin{aligned}
derx1 - a_2 \cdot derx2 &= b_2 && (1.1)\\
b_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_3 &= b_2 \cdot derx2 && (1.2)\\
x_2 &= b_1 \cdot x_1 - derx1 && (1.3)\\
x_3 &= x_4 - x_1 && (1.4)\\
b_2 &= b_1 \cdot t && (1.5)
\end{aligned}$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas: t
a_1, a_2, b_1
x_1, x_2
– Desconocidas: x_3, x_4, b_2
$derx1$, $derx2$

Con el fin de analizar si el modelo es *estructuralmente singular*, se comprueba que:

1. El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 5 ecuaciones y 5 incógnitas: x_3, x_4, b_2, $derx1$, $derx2$.

2. Cada incógnita puede emparejarse con una ecuación en que aparezca y con la cual no se haya emparejado ya otra incógnita.

$$
\begin{array}{lll l}
derx2 & \rightarrow & derx1 - a_2 \cdot derx2 = b_2 & \text{Ec. (1.1)} \\
x_3 & \rightarrow & b_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot x_3 = b_2 \cdot derx2 & \text{Ec. (1.2)} \\
derx1 & \rightarrow & x_2 = b_1 \cdot x_1 - derx1 & \text{Ec. (1.3)} \\
x_4 & \rightarrow & x_3 = x_4 - x_1 & \text{Ec. (1.4)} \\
b_2 & \rightarrow & b_2 = b_1 \cdot t & \text{Ec. (1.5)}
\end{array}
$$

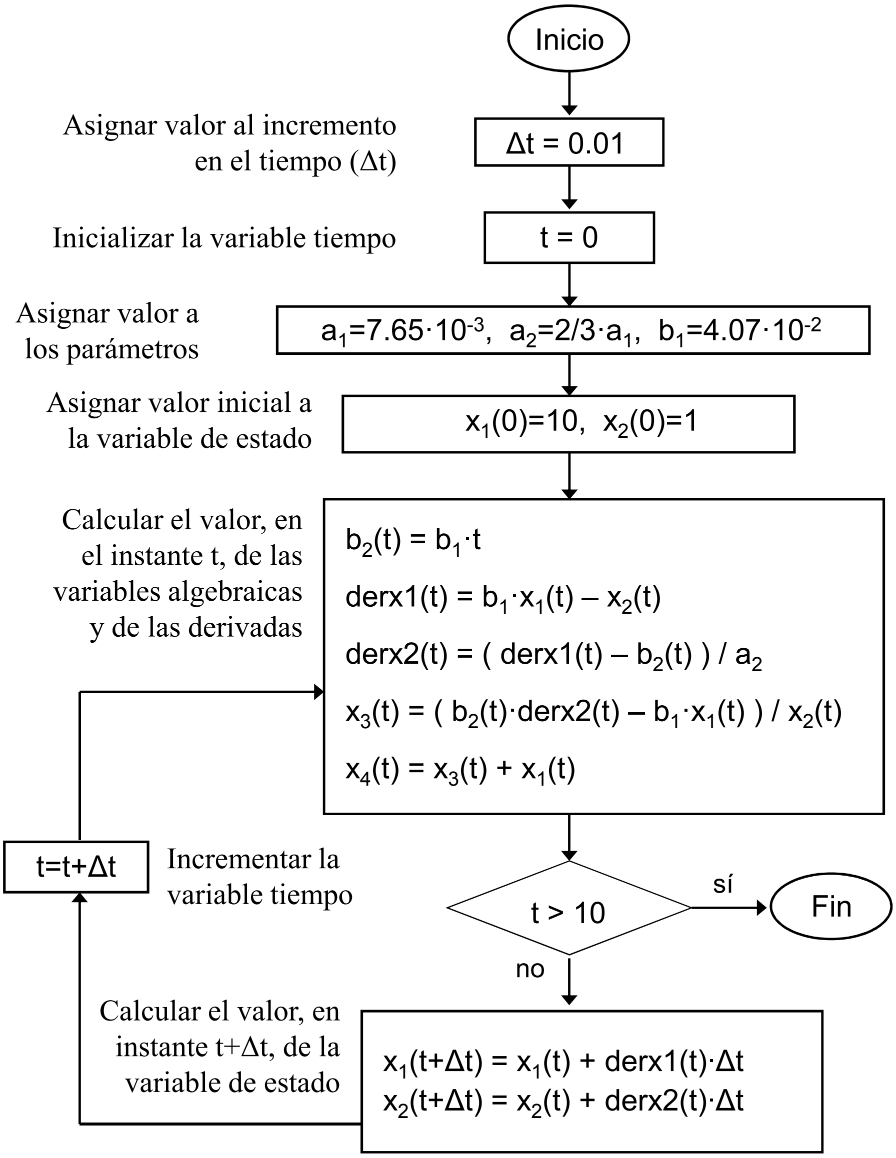
Finalmente, las ecuaciones del modelo, con la asignación de la causalidad computacional señalada, son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
derx1 - a_2 \cdot [derx2] &= b_2 \\
b_1 \cdot x_1 + x_2 \cdot [x_3] &= b_2 \cdot derx2 \\
x_2 &= b_1 \cdot x_1 - [derx1] \\
x_3 &= [x_4] - x_1 \\
[b_2] &= b_1 \cdot t
\end{aligned}
$$

El modelo ordenado y resuelto es el siguiente (existen otras posibles ordenaciones de las ecuaciones que son igualmente válidas):

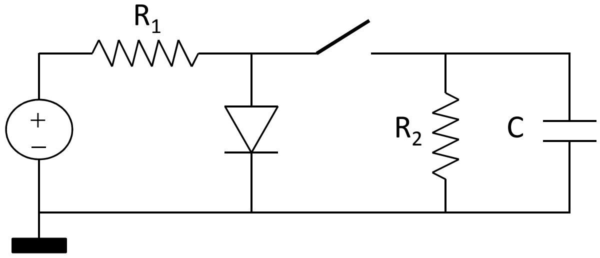
$$
\begin{aligned}
[b_2] &= b_1 \cdot t \\
[derx1] &= b_1 \cdot x_1 - x_2 \\
[derx2] &= \frac{derx1 - b_2}{a_2} \\
[x_3] &= \frac{b_2 \cdot derx2 - b_1 \cdot x_1}{x_2} \\
[x_4] &= x_3 + x_1
\end{aligned}
$$

En la figura siguiente se muestra el diagrama de flujo para la simulación del modelo, empleando el método de integración de Euler explícito y considerando como condición de finalización que el tiempo simulado alcance el valor 10 s. Se han asignado valores arbitrarios a los valores iniciales de las variables de estado.


Inicio
Asignar valor al incremento en el tiempo (Δt)
Δt = 0.01
Inicializar la variable tiempo
t = 0
Asignar valor a los parámetros
$a_1=7.65\cdot10^{-3}$, $a_2=2/3\cdot a_1$, $b_1=4.07\cdot10^{-2}$
Asignar valor inicial a la variable de estado
$x_1(0)=10$, $x_2(0)=1$
Calcular el valor, en el instante t, de las variables algebraicas y de las derivadas
$b_2(t) = b_1\cdot t$
$derx1(t) = b_1\cdot x_1(t) – x_2(t)$
$derx2(t) = (derx1(t) – b_2(t)) / a_2$
$x_3(t) = (b_2(t)\cdot derx2(t) – b_1\cdot x_1(t)) / x_2(t)$
$x_4(t) = x_3(t) + x_1(t)$
t=t+Δt
Incrementar la variable tiempo
t > 10
sí
Fin
no
Calcular el valor, en instante t+Δt, de la variable de estado
$x_1(t+\Delta t) = x_1(t) + derx1(t)\cdot\Delta t$
$x_2(t+\Delta t) = x_2(t) + derx2(t)\cdot\Delta t$

PREGUNTA 3 (4 puntos)

En la figura mostrada a continuación se representa un circuito eléctrico compuesto por un generador sinusoidal de voltaje, dos resistencias, un diodo, un condensador y un interruptor.



Realizamos las suposiciones siguientes:

– La amplitud y frecuencia del generador sinusoidal de voltaje son parámetros del modelo.

– Las resistencias tienen valor R_1 y R_2, y el condensador tiene capacidad C, tal como se indica en la figura. R_1, R_2 y C son parámetros del modelo.

– El diodo es descrito mediante la relación constitutiva siguiente:

$$i = I_S \cdot \left(\exp\left(\frac{u}{V_t} \right) - 1 \right)$$

siendo la corriente de saturación (I_S) y la tensión térmica (V_t) parámetros del modelo.

– El interruptor eléctrico es ideal. Puede encontrarse en dos fases: abierto y cerrado. Mientras está abierto no permite el paso de corriente. Mientras está cerrado la caída de tensión entre sus bornes es cero. El interruptor cambia de fase cada T segundos, siendo T un parámetro del modelo.

3.a (0.5 puntos) Escriba una tabla en la cual se indique el nombre, significado y unidades de las constantes, parámetros y variables del modelo.

3.b (1 punto) Escriba las ecuaciones del modelo. Compruebe que el número de ecuaciones es igual al número de variables desconocidas a efectos de la asignación de la causalidad computacional.

3.c (2.5 puntos) Describa el modelo en Modelica, como un modelo atómico. Inicialice el modelo asignando los valores que desee a los parámetros del modelo y a sus variables de estado.

Solución a la Pregunta 3

En la tabla mostrada a continuación se indica el nombre, significado y unidades de las constantes, parámetros y variables del modelo. Se han asignado valores arbitrarios a los parámetros.

Nombre	Significado	Valor	Unidades
t	Tiempo		s
i_{gen}	Corriente del generador		A
i_{R1}	Corriente de la resistencia 1		A
i_{R2}	Corriente de la resistencia 2		A
i_C	Corriente del condensador		A
i_D	Corriente del diodo		A
i_{sw}	Corriente del interruptor		A
u_1	Voltaje del generador		V
u_2	Voltaje del diodo		V
u_3	Voltaje de salida		V
$open$	Fase del interruptor		
U_0	Amplitud del generador	5	V
f	Frecuencia del generador	10	s^{-1}
ϕ	Fase del generador	0	rad
R_1	Valor de la resistencia 1	50	ohm
R_2	Valor de la resistencia 2	50	ohm
C	Capacidad del condensador	0.001	F
I_S	Corriente saturación diodo	10^{-9}	A
V_t	Tensión térmica diodo	0.025	V
T	Periodo conmutación interruptor	0.05	s
π	Número pi	3.14159265359	

El modelo está descrito por las Ecs. (1.6) – (1.15). Las tres primeras son las ecuaciones de conservación de la corriente planteadas en los nodos del generador, del diodo y del condensador. Las Ecs. (1.9) – (1.14) son las relaciones constitutivas de los componentes. La última ecuación describe el cambio de fase del conmutador.

$$
\begin{aligned}
i_{gen} &= i_{R1} && (1.6)\\
i_{R1} &= i_D + i_{sw} && (1.7)\\
i_{sw} &= i_{R2} + i_C && (1.8)\\
u_1 &= U_0 \cdot \sin\left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \phi\right) && (1.9)\\
u_1 - u_2 &= i_{R1} \cdot R_1 && (1.10)\\
i_D &= Is \cdot \left(\exp(\frac{u_2}{V_t}) - 1\right) && (1.11)\\
0 &= \begin{cases} i_{sw} & \text{si } \mathit{open} \\ u_2 - u_3 & \text{si } \text{ not } \mathit{open} \end{cases} && (1.12)\\
u_3 &= i_{R2} \cdot R_2 && (1.13)\\
C \cdot \frac{du_3}{dt} &= i_C && (1.14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
\text{when } \text{sample}(0, T) \text{ then} \\
\quad \mathit{open} = \text{not } \text{pre}(\mathit{open}) \\
\text{end } \text{when;}
\end{array}
\qquad (1.15)
$$

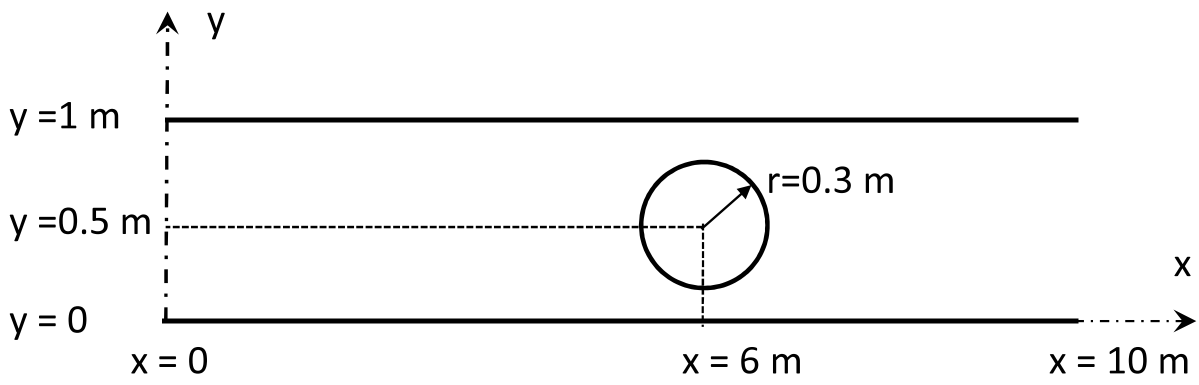
A continuación se muestra el código Modelica que describe el modelo.

```
model circuito1
  import SI = Modelica.SIunits;
  SI.Current i_gen "Corriente generador";
  SI.Current i_R1  "Corriente R1";
  SI.Current i_R2  "Corriente R2";
  SI.Current i_C   "Corriente condensador";
  SI.Current i_D   "Corriente diodo";
  SI.Current i_sw  "Corriente interruptor";
  SI.Voltage u_1   "Voltaje generador";
  SI.Voltage u_2   "Voltaje diodo";
  SI.Voltage u_3(start=0.1,fixed=true) "Voltaje salida";
  Boolean open(start=true, fixed=true);
  // Parametros del generador
  parameter SI.Voltage U0=5;
  parameter SI.Frequency frec=10;
  parameter SI.AngularFrequency w=2*Modelica.Constants.pi*frec;
  parameter SI.Angle phi=0;
  // Resistencias
  parameter SI.Resistance R1=50;
  parameter SI.Resistance R2=50;
  // Condensador
  parameter SI.Capacitance C=1e-3;
  // Diodo
  parameter SI.Current Is=1e-9;
  parameter SI.Voltage Vt=0.025;
  // Interruptor
  parameter SI.Time T = 0.05;
equation
  // Ecuaciones en los nodos
  i_gen = i_R1;
  i_R1 = i_D + i_sw;
  i_sw = i_R2 + i_C;
  // Relaciones constitutivas
  u_1 = U0*sin(w*time + phi);
  u_1 - u_2 = i_R1*R1;
  i_D = Is*(exp(u_2/Vt) - 1);
  0 = if open then i_sw else u_2 - u_3;
  u_3 = i_R2*R2;
  C*der(u_3) = i_C;
  when sample(0,T) then
    open = not pre(open);
  end when;
  annotation (experiment(StopTime=0.2));
end circuito1;
```

PREGUNTA 4 (2 puntos)

Escriba un *script* en FlexPDE para obtener las líneas equipotenciales y los vectores del campo eléctrico del sistema descrito a continuación.

El sistema es un condensador formado por dos electrodos paralelos. El electrodo inferior está a un voltaje de 0 V. El electrodo superior está a un voltaje de 10 V. Se analiza el sistema en dos dimensiones, tal como se describe a continuación. En la figura se muestra esquemáticamente la geometría del sistema.



Los electrodos están situados en $y = 0$ e $y = 1$ m, y tienen una longitud de 10 m, extendiéndose desde $x = 0$ a $x = 10$ m. Suponemos que no existen efectos debidos a los bordes y que el campo eléctrico tanto en $x = 0$ como en $x = 10$ m está dirigido verticalmente.

En el interior del condensador existe un medio de permitividad relativa (ϵ_r) de valor 2, excepto en un círculo de radio (r) 0.3 m, cuyo centro está situado en $x = 6$ m e $y = 0.5$ m, donde hay un medio de permitividad relativa (ϵ_r) 50.

La permitividad del medio (ϵ) se calcula a partir de la expresión $\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$, siendo el valor de ϵ_0 igual a $8.85 \cdot 10^{-12}$ F/m.

Este fenómeno se describe mediante la ecuación diferencial mostrada a continuación, donde V es el voltaje.

$$\nabla \cdot (-\epsilon \cdot \nabla V) = 0$$

Solución a la Pregunta 4

El *script* se muestra a continuación.

```
TITLE 'Condensador'
COORDINATES cartesian2
VARIABLES
  V
DEFINITIONS
  eps0 = 8.85e-12
  epsr = 2
  eps = eps0*epsr
  r=0.3
EQUATIONS
  div(eps*grad(V))=0
BOUNDARIES          { Definicio del dominio}
  REGION 1          { Region material medio permitividad 2 }
    START(0,0)
    VALUE(V)=0  LINE TO (10,0)
    NATURAL(V)=0  LINE TO (10,1)
    VALUE(V)=10  LINE   TO (0,1)
    NATURAL(V)=0  LINE TO CLOSE
 REGION 2  {Region material medio permitividad 50}
  epsr= 50
  START (6-r,0.5)   ARC(CENTER=6,0.5) ANGLE = 360
PLOTS
  CONTOUR(V)
  VECTOR(-dx(V), -dy(V))
END
```