MÉTODOS DE SIMULACIÓN Y MODELADO

Solución al examen de Febrero 2018

PREGUNTA 1 (2 puntos)

Responda a las preguntas siguientes.

1.a (1 punto) Explique detalladamente un algoritmo para la simulación de modelos dinámicos híbridos.

1.b (1 punto) Explique qué funcionalidad tiene el operador **noEvent()** de Modelica. Ponga ejemplos de uso.

Solución a la Pregunta 1

1.a Véase la página 74 del texto base.
1.b Véanse las páginas 444 y 486 del texto base.

PREGUNTA 2 (2 puntos)

A continuación se muestra un modelo matemático, donde la variable t representa el tiempo.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} + a \cdot \frac{dx_2}{dt} &= b \cdot x_1 - x_4 \cdot x_2 \\
\frac{dx_4}{dt} &= -2 \cdot b \cdot x_4 \\
x_1 \cdot \frac{dx_2}{dt} &= -b \cdot x_2 + x_3 \\
x_1 \cdot x_3 + x_2 &= 0 \\
x_5 &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\
a &= 2.3 \cdot 10^{-3} \\
b &= 9.87 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}
$$

2.a (1 punto) Clasifique las variables del modelo en parámetros, variables de estado y variables algebraicas. A continuación, realice la asignación de la causalidad computacional. Explique detalladamente el procedimiento seguido para ello.

2.b (1 punto) Escriba el diagrama de flujo del algoritmo para la simulación de este modelo. Emplee el método de integración de Euler explícito. Asigne el valor inicial que desee a las variables de estado. La condición de finalización de la simulación es que el tiempo simulado alcance el valor 10 s.

Solución a la Pregunta 2

Las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes: a, b
– Variables de estado: x_1, x_2, x_4
– Variables algebraicas: x_3, x_5

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{dx_1}{dt} \to derx1, \qquad \frac{dx_2}{dt} \to derx2, \qquad \frac{dx_4}{dt} \to derx4$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$
\begin{aligned}
derx1 + a \cdot derx2 &= b \cdot x_1 - x_4 \cdot x_2 && (1.1)\\
derx4 &= -2 \cdot b \cdot x_4 && (1.2)\\
x_1 \cdot derx2 &= -b \cdot x_2 + x_3 && (1.3)\\
x_1 \cdot x_3 + x_2 &= 0 && (1.4)\\
x_5 &= \frac{x_1 + x_2}{2} && (1.5)
\end{aligned}
$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas: t
a, b
x_1, x_2, x_4
– Desconocidas: x_3, x_5
$derx1$, $derx2$, $derx4$

Con el fin de analizar si el modelo es *estructuralmente singular*, se comprueba que:

1. El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 5 ecuaciones y 5 incógnitas: x_3, x_5, $derx1$, $derx2$, $derx4$.

2. Cada incógnita puede emparejarse con una ecuación en que aparezca y con la cual no se haya emparejado ya otra incógnita.

$derx1$	$\rightarrow$	$derx1 + a \cdot derx2 = b \cdot x_1 - x_4 \cdot x_2$	Ec. (1.1)
$derx4$	$\rightarrow$	$derx4 = -2 \cdot b \cdot x_4$	Ec. (1.2)
$derx2$	$\rightarrow$	$x_1 \cdot derx2 = -b \cdot x_2 + x_3$	Ec. (1.3)
x_3	$\rightarrow$	$x_1 \cdot x_3 + x_2 = 0$	Ec. (1.4)
x_5	$\rightarrow$	$x_5 = \frac{x_1+x_2}{2}$	Ec. (1.5)

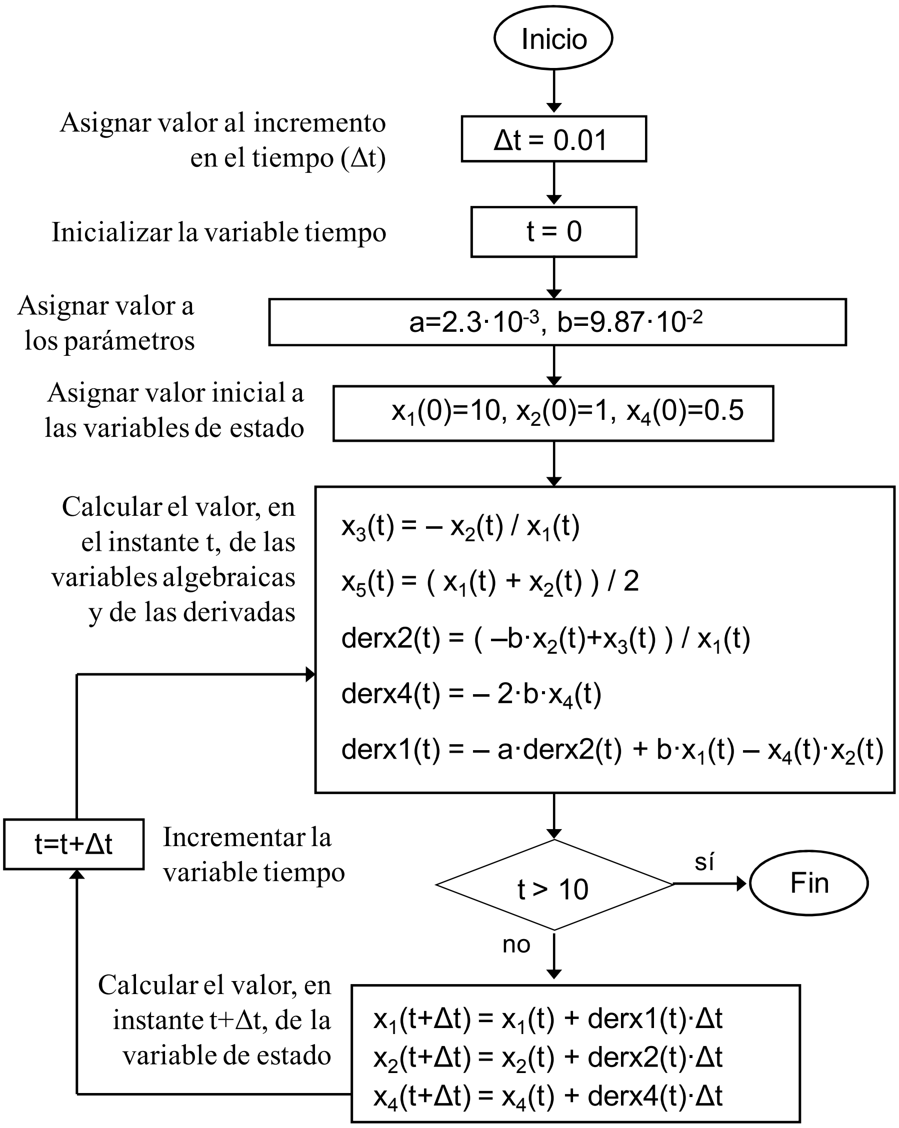
Finalmente, las ecuaciones del modelo, con la asignación de la causalidad computacional señalada, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
[derx1] + a \cdot derx2 &= b \cdot x_1 - x_4 \cdot x_2 \\
[derx4] &= -2 \cdot b \cdot x_4 \\
x_1 \cdot [derx2] &= -b \cdot x_2 + x_3 \\
x_1 \cdot [x_3] + x_2 &= 0 \\
[x_5] &= \frac{x_1 + x_2}{2}
\end{aligned}$$

El modelo ordenado y resuelto es el siguiente (existen otras posibles ordenaciones de las ecuaciones que son igualmente válidas):

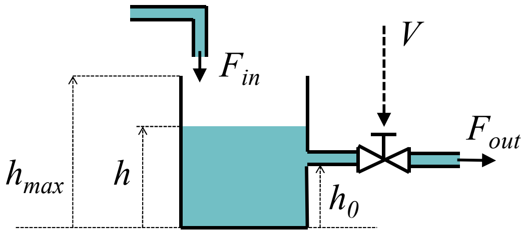
$$\begin{aligned}
[x_3] &= -\frac{x_2}{x_1} \\
[x_5] &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\
[derx2] &= \frac{-b \cdot x_2 + x_3}{x_1} \\
[derx4] &= -2 \cdot b \cdot x_4 \\
[derx1] &= -a \cdot derx2 + b \cdot x_1 - x_4 \cdot x_2
\end{aligned}$$

En la figura siguiente se muestra el diagrama de flujo para la simulación del modelo, empleando el método de integración de Euler explícito y considerando como condición de finalización que el tiempo simulado alcance el valor 10 s. Se han asignado valores arbitrarios a los valores iniciales de las variables de estado.


Inicio
Asignar valor al incremento en el tiempo (Δt)
Δt = 0.01
Inicializar la variable tiempo
t = 0
Asignar valor a los parámetros
a=2.3·10-3, b=9.87·10-2
Asignar valor inicial a las variables de estado
x1(0)=10, x2(0)=1, x4(0)=0.5
Calcular el valor, en el instante t, de las variables algebraicas y de las derivadas
x3(t) = – x2(t) / x1(t)
x5(t) = (x1(t) + x2(t)) / 2
derx2(t) = (–b·x2(t)+x3(t)) / x1(t)
derx4(t) = – 2·b·x4(t)
derx1(t) = – a·derx2(t) + b·x1(t) – x4(t)·x2(t)
t=t+Δt
Incrementar la variable tiempo
t > 10
sí
Fin
no
Calcular el valor, en instante t+Δt, de la variable de estado
x1(t+Δt) = x1(t) + derx1(t)·Δt
x2(t+Δt) = x2(t) + derx2(t)·Δt
x4(t+Δt) = x4(t) + derx4(t)·Δt

PREGUNTA 3 (4 puntos)

Consideremos el sistema mostrado en la figura, que está compuesto por un depósito, una tubería a través de la cual entra un caudal de líquido F_{in} al depósito, y una tubería de desagüe con una válvula, a través de la cual sale del depósito un caudal de líquido F_{out}.



La válvula puede encontrarse en dos fases: abierta y cerrada. En el primer caso (abierta) permite el paso de líquido y en el segundo (cerrada) lo impide. El valor de la variable Booleana V determina si la válvula está abierta (V=true) o cerrada (V=false). La fase de la válvula cambia cada $T = 0.5$ segundos, estando inicialmente cerrada.

La tubería de desagüe está situada a una altura $h_0 = 5$ m. Por ello, sólo circula líquido por esta tubería si, estando la válvula abierta, la altura del líquido en el depósito (h) es mayor que h_0. En este caso, el caudal se calcula de la forma indicada a continuación

$$F_{out} = K \cdot \sqrt{h - h_0}$$

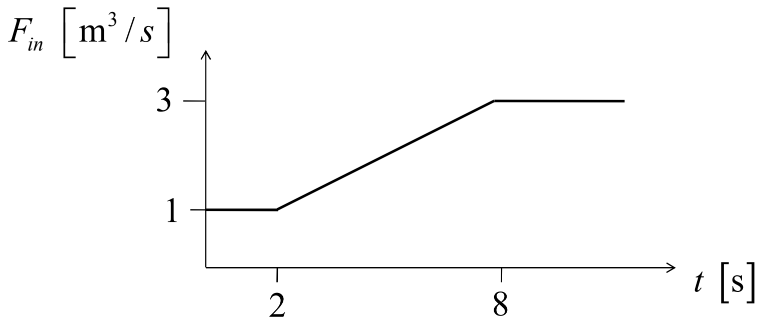
siendo K un parámetro de valor conocido. El valor de K es 3.5, expresado en unidades del sistema internacional.

El modelo posee una variable Booleana llamada $Alarma$, que se calcula de la forma indicada a continuación. Se define una altura máxima en el depósito, h_{max}, que tiene un valor constante conocido igual a 8 m. Mientras el nivel de líquido h supere el valor h_{max}, la variable $Alarma$ vale true. En caso contrario, vale false.

La sección de la base del depósito, A, es constante e igual a 1 m^2.

La altura inicial de líquido en el depósito es 0.5 m.

La evolución en el tiempo del caudal de entrada F_{in} es conocida. Se muestra en la figura siguiente.



Puede realizar las hipótesis adicionales que desee acerca del funcionamiento del sistema, siempre que no estén en contradicción con la descripción dada en el enunciado.

3.a (0.5 puntos) Escriba una tabla en la cual se indique el nombre, significado y unidades de las constantes, parámetros y variables del modelo.

3.b (1 punto) Escriba las ecuaciones del modelo. Compruebe que el número de ecuaciones es igual al número de variables desconocidas a efectos de la asignación de la causalidad computacional.

3.c (2.5 puntos) Describa el modelo en Modelica, como un modelo atómico.

Solución a la Pregunta 3

En la tabla mostrada a continuación se indica el nombre, significado y unidades de las constantes, parámetros y variables del modelo.

Nombre	Significado	Valor	Unidades
h_{max}	Altura máxima	8	m
h_0	Altura tubería	5	m
K	Parámetro caudal de salida	3.5	$\text{m}^{5/2}\cdot \text{s}^{-1}$
A	Sección base depósito	1	m^2
T	Periodo apertura válvula	0.5	s
F_{in}	Caudal de entrada		$\text{m}^3\cdot \text{s}^{-1}$
F_{out}	Caudal de salida		$\text{m}^3\cdot \text{s}^{-1}$
h	Altura de líquido		m
V	Válvula está abierta		Booleana
$Alarma$	Alarma está disparada		Booleana

El modelo está descrito por las Eqs. (1.6) – (1.10). Las tres primeras permiten calcular la altura de líquido (h), y los caudales de entrada y salida (F_{in}, F_{out}). Las dos últimas permiten calcular las variables Booleanas V y $Alarma$.

$$
\begin{aligned}
A \cdot \frac{dh}{dt} &= F_{in} - F_{out} && (1.6)\\
F_{out} &= \begin{cases} K \cdot \sqrt{h - h_0} & \text{si } V \text{ and } h > h_0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} && (1.7)\\
F_{in} &= \begin{cases} 1 & \text{si } t < 2 \\ \frac{1}{3} \cdot (t-2) + 1 & \text{si } 2 \le t \le 8 \\ 3 & \text{si } t > 8 \end{cases} && (1.8)\\
Alarma &= h > hmax && (1.9)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{when sample}(T, T) \text{ then} \\
&\quad V = \text{not pre}(V) \\
&\text{end when;}
\end{aligned}
\qquad (1.10)
$$

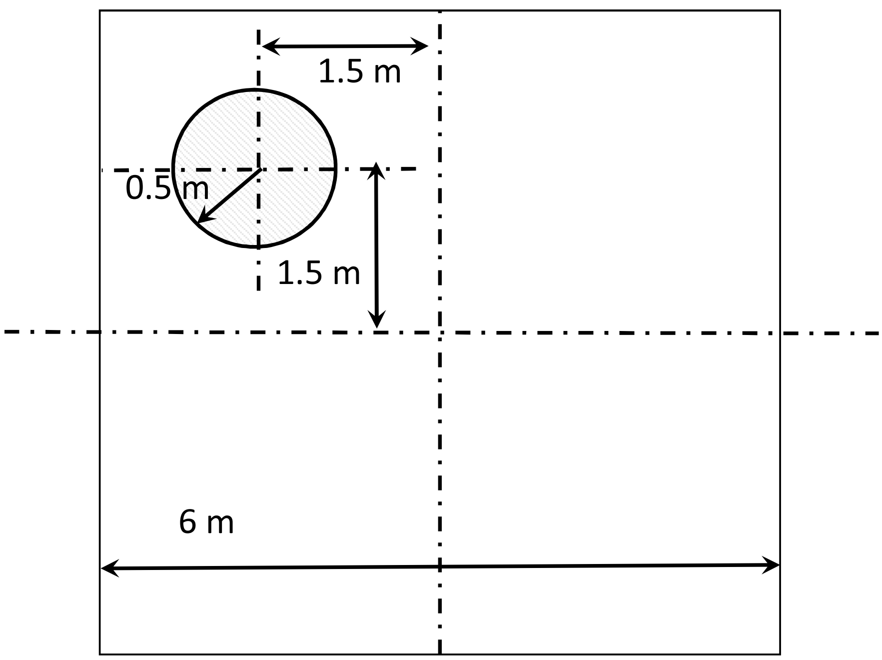
A continuación se muestra el código Modelica que describe el modelo.

```
model deposito
  parameter Real hmax(unit="m") = 8;
  parameter Real h0(unit="m") = 5;
  parameter Real K = 3.5;
  parameter Real A( unit="m2") = 1;
  parameter Real T( unit="s") = 0.5;
  Real Fin(unit="m3/s");
  Real Fout(unit="m3/s");
  Real h(unit="m",start=0.5,fixed=true);
  Boolean V(start=false,fixed=true);
  Boolean Alarma;
equation
  A*der(h) = Fin - Fout;
  Fout = if noEvent(V and h>h0) then K*sqrt(h-h0) else 0;
  Fin = if time<2 then 1 elseif time < 8 then
  (1/3)*(time-2)+1 else 3;
  Alarma = h > hmax;
  when sample(T,T) then
    V = not pre(V);
  end when;
end deposito;
```

PREGUNTA 4 (2 puntos)

Escriba un *script* en FlexPDE para obtener las líneas equipotenciales y los vectores correspondientes al campo eléctrico del sistema descrito a continuación.

El sistema es un cable cuya sección exterior es rectangular y cuya sección interior es circular. La sección exterior es un cuadrado metálico, de lado 6 m, conectado a 0 V. La sección interior es un circulo metálico de radio 0.5 m y conectado a 10 V. Si dividimos el cuadrado metálico en cuatro cuadrados iguales, el círculo está centrado en el centro del cuadrado superior izquierdo. El medio entre ambos conductores tiene permitividad 1. Se trata de un problema de dos dimensiones cuya geometría se muestra en la siguiente figura.



Solución a la Pregunta 4

El *script* se muestra a continuación.

```
TITLE
    'Cable'
SELECT
    errlim=1e-3      spectral_colors
VARIABLES
    U
DEFINITIONS
    L=3.0       r0=0.5      U_rod=10.0
    Ex=-dx(U)        Ey=-dy(U)        E=-grad(U)        Em=magnitude(E)
EQUATIONS
    div( grad( U))=0
BOUNDARIES
region 'dominio'
    start 'cuadrado'  (-L,-L)    value( U)= 0            {Cuadrado exterior}
    line to (L,-L)    to (L,L)    to (-L,L) close
    start 'circulo'  (-L/2+r0,L/2)                      { Circulo interior }
    value(U)=U_rod     arc( center=-L/2,L/2) angle=360
PLOTS
    contour( U)             vector( E) norm
END
```