MÉTODOS DE SIMULACIÓN Y MODELADO

Solución al examen de Febrero 2017

PREGUNTA 1 (2 puntos)

Responda a las preguntas siguientes.

1.a (1 punto) Indique cómo pueden seleccionarse las variables de los conectores en los dominios indicados a continuación, de manera que el producto (across $\times$ through) tenga unidades de potencia: eléctrico, mecánica de traslación, mecánica de rotación, hidráulico, térmico y químico.

1.b (1 punto) Explique en qué consiste la técnica de integración mixed-mode.

Solución a la Pregunta 1

1.a Véase la Tabla 2.2 del texto base.
1.b Véase la Sección 3.8.3 del texto base.

PREGUNTA 2 (2 puntos)

A continuación se muestra un modelo matemático, donde la variable t representa el tiempo.

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= v \\
\frac{dv}{dt} &= a \\
F &= m \cdot a \\
F &= -K \cdot (v - u) + f_e \\
f_e &= 2.3 \cdot \sin(t) \\
\frac{du}{dt} &= -u \\
m &= 0.2 \\
K &= 1.3 \cdot 10^{-2}
\end{aligned}
$$

2.a (1 punto) Clasifique las variables del modelo en parámetros, variables de estado y variables algebraicas. A continuación, realice la asignación de la causalidad computacional. Explique detalladamente el procedimiento seguido para ello.

2.b (1 punto) Escriba el diagrama de flujo del algoritmo para la simulación de este modelo. Emplee el método de integración de Euler explícito. Asigne el valor inicial que desee a las variables de estado. La condición de finalización de la simulación es que el tiempo simulado alcance el valor 10 s.

Solución a la Pregunta 2

Las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

– Parámetros y constantes: m, K
– Variables de estado: x, v, u
– Variables algebraicas: a, f_e, F

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{dx}{dt} \to derx, \qquad \frac{dv}{dt} \to derv, \qquad \frac{du}{dt} \to deru$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$derx = v \tag{1.1}$$
$$derv = a \tag{1.2}$$
$$F = m \cdot a \tag{1.3}$$
$$F = -K \cdot (v - u) + f_e \tag{1.4}$$
$$f_e = 2.3 \cdot \sin(t) \tag{1.5}$$
$$deru = -u \tag{1.6}$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

– Conocidas: t
m, K
x, v, u
– Desconocidas: a, F, f_e
$derx$, $derv$, $deru$

Con el fin de analizar si el modelo es *estructuralmente singular*, se comprueba que:

1. El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 6 ecuaciones y 6 incógnitas: a, F, f_e, $derx$, $derv$, $deru$.

2. Cada incógnita puede emparejarse con una ecuación en que aparezca y con la cual no se haya emparejado ya otra incógnita.

$$\begin{array}{lll l}
derx & \rightarrow & derx = v & \text{Ec. (1.1)} \\
derv & \rightarrow & derv = a & \text{Ec. (1.2)} \\
a & \rightarrow & F = m \cdot a & \text{Ec. (1.3)} \\
F & \rightarrow & F = -K \cdot (v - u) + f_e & \text{Ec. (1.4)} \\
f_e & \rightarrow & f_e = 2.3 \cdot \sin(t) & \text{Ec. (1.5)} \\
deru & \rightarrow & deru = -u & \text{Ec. (1.6)}
\end{array}$$

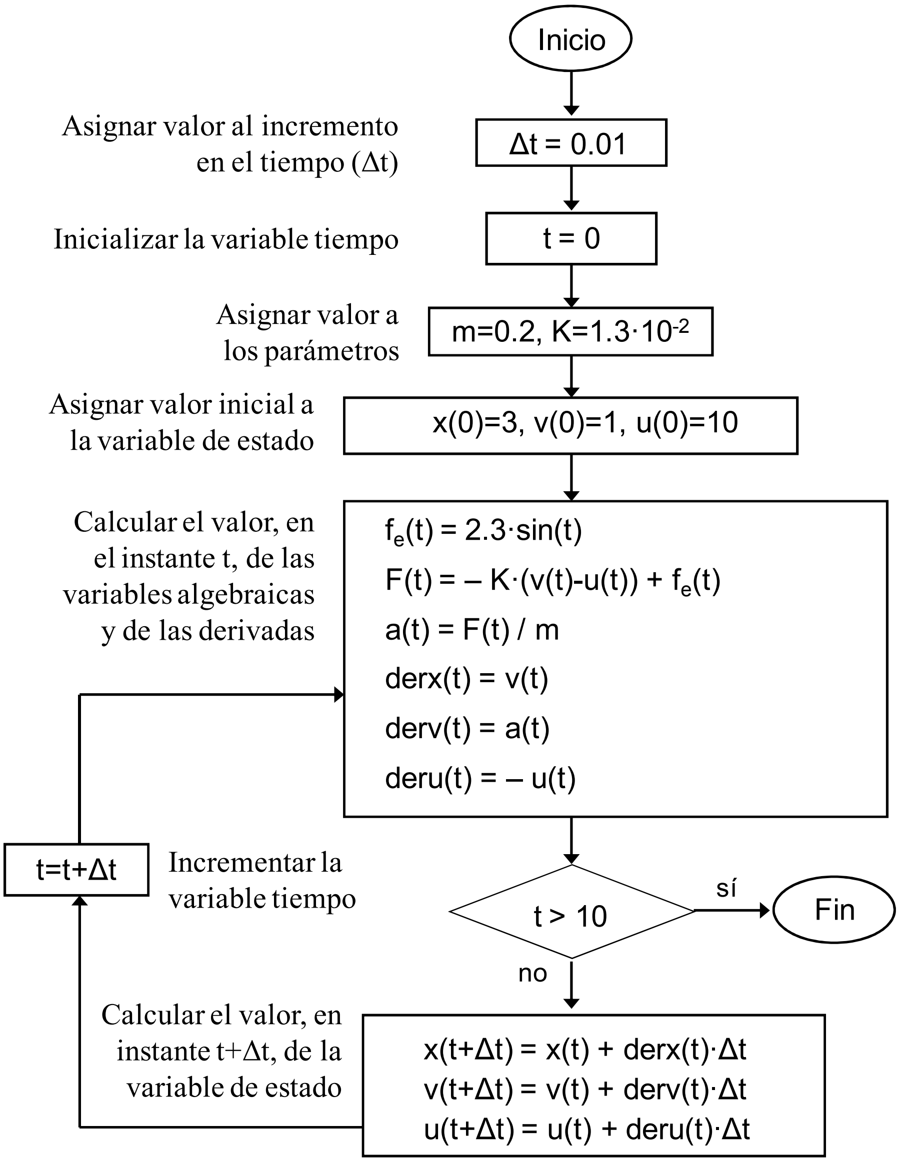
Finalmente, las ecuaciones del modelo, con la asignación de la causalidad computacional señalada, son las siguientes:

$$\begin{aligned}
[derx] &= v \\
[derv] &= a \\
F &= m \cdot [a] \\
[F] &= -K \cdot (v - u) + f_e \\
[f_e] &= 2.3 \cdot \sin(t) \\
[deru] &= -u
\end{aligned}$$

El modelo ordenado y resuelto es el siguiente (existen otras posibles ordenaciones de las ecuaciones que son igualmente válidas):

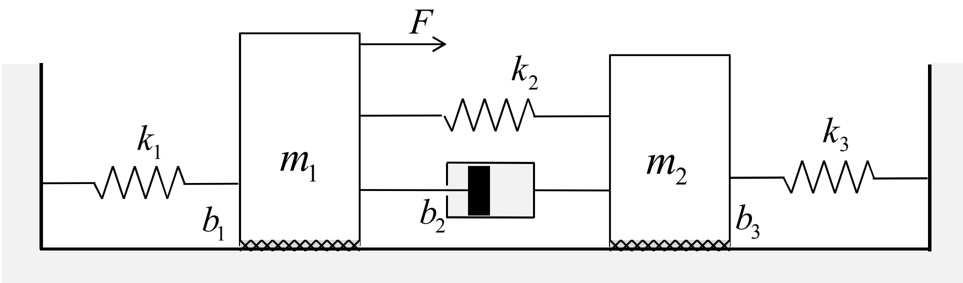
$$\begin{aligned}
[f_e] &= 2.3 \cdot \sin(t) \\
[F] &= -K \cdot (v - u) + f_e \\
[a] &= \frac{F}{m} \\
[derx] &= v \\
[derv] &= a \\
[deru] &= -u
\end{aligned}$$

En la figura siguiente se muestra el diagrama de flujo para la simulación del modelo, empleando el método de integración de Euler explícito y considerando como condición de finalización que el tiempo simulado alcance el valor 10 s. Se han asignado valores arbitrarios a los valores iniciales de las variables de estado.


Inicio
Asignar valor al incremento en el tiempo (Δt)
Δt = 0.01
Inicializar la variable tiempo
t = 0
Asignar valor a los parámetros
m=0.2, K=1.3·10^-2
Asignar valor inicial a la variable de estado
x(0)=3, v(0)=1, u(0)=10
Calcular el valor, en el instante t, de las variables algebraicas y de las derivadas
fe(t) = 2.3·sin(t)
F(t) = – K·(v(t)-u(t)) + fe(t)
a(t) = F(t) / m
derx(t) = v(t)
derv(t) = a(t)
deru(t) = – u(t)
t=t+Δt
Incrementar la variable tiempo
t > 10
sí
Fin
no
Calcular el valor, en instante t+Δt, de la variable de estado
x(t+Δt) = x(t) + derx(t)·Δt
v(t+Δt) = v(t) + derv(t)·Δt
u(t+Δt) = u(t) + deru(t)·Δt

PREGUNTA 3 (4 puntos)

En la figura situada a continuación se muestra un sistema que consiste en dos objetos de masa constante m_1 y m_2, que deslizan con rozamiento sobre el suelo. Los Objetos 1 y 2 se encuentran unidos a las paredes laterales mediante muelles, y están unidos entre sí mediante un amortiguador y un muelle. Sobre el Objeto 1 actúa una fuerza sinusoidal conocida F. Las paredes están en reposo respecto al suelo. El modelo debe describir la evolución en el tiempo de la velocidad y posición de los objetos.



3.a (2 puntos) Escriba las ecuaciones del modelo. Indique el significado y las unidades de cada una de las variables del modelo. Puede realizar las hipótesis y aproximaciones que desee, siempre que no estén en contradicción con la descripción del sistema dada en el enunciado.

3.b (2 puntos) Describa el modelo anterior en Modelica como un modelo atómico.

Solución a la Pregunta 3

Especifiquemos la referencia y el criterio de signos para las velocidades. Escogemos como velocidad de referencia la del suelo y las paredes, y asumiremos que tienen velocidad cero. Consideraremos que un objeto tiene velocidad positiva cuando se desplaza hacia la derecha. Adoptaremos el mismo criterio de signos para la fuerza: es positiva cuando está orientada hacia la derecha.

Supongamos que la fuerza externa viene dada por la Ec. (1.7), donde F_0 y w son parámetros de valor conocido.

$$F = F_0 \cdot \sin(w \cdot t) \tag{1.7}$$

La segunda ley de Newton permite relacionar el cambio en el momento lineal de cada uno de los objetos con las fuerzas que actúan sobre él.

$$m_1 \cdot \frac{dv_1}{dt} = \underbrace{-b_1 \cdot v_1}_{\text{Fricción con el suelo}} \underbrace{-b_2 \cdot (v_1 - v_2)}_{\text{Fuerza del amortiguador}} \underbrace{-k_1 \cdot e_1}_{\text{Fuerza del muelle 1}} \underbrace{+k_2 \cdot e_2}_{\text{Fuerza del muelle 2}} \underbrace{+F}_{\text{Fuerza externa}} \tag{1.8}$$

$$m_2 \cdot \frac{dv_2}{dt} = \underbrace{-b_3 \cdot v_2}_{\text{Fricción con el suelo}} \underbrace{-b_2 \cdot (v_2 - v_1)}_{\text{Fuerza del amortiguador}} \underbrace{-k_2 \cdot e_2}_{\text{Fuerza del muelle 2}} \underbrace{+k_3 \cdot e_3}_{\text{Fuerza del muelle 3}} \tag{1.9}$$

donde e representa la diferencia entre la elongación actual del muelle (distancia entre sus extremos) y su elongación natural. El Muelle 1 tiene el extremo izquierdo fijo y el extremo derecho se mueve con velocidad v_1. El extremo izquierdo del Muelle 2 se mueve con velocidad v_1 y el derecho con velocidad v_2. El Muelle 3 tiene el extremo derecho fijo y el extremo izquierdo se mueve con velocidad v_2. Por tanto:

$$\frac{de_1}{dt} = v_1 \tag{1.10}$$

$$\frac{de_2}{dt} = v_2 - v_1 \tag{1.11}$$

$$\frac{de_3}{dt} = -v_2 \tag{1.12}$$

La relación entre la posición de los objetos y sus velocidades viene dada por las ecuaciones siguientes:

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1 \tag{1.13}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = v_2 \tag{1.14}$$

El modelo del sistema está compuesto por las Ecs. (1.7) – (1.14), más el valor constante conocido de la amplitud (F_0) y frecuencia angular (w) de la fuerza externa, las masas (m_1, m_2), los eficientes de los muelles (k_1, k_2, k_3), el coeficiente de fricción viscosa del amortiguador (b_2) y los coeficientes de fricción seca (b_1, b_3).

Para inicializar el modelo necesitamos conocer el valor inicial de las velocidades y posiciones de los dos objetos, y la elongación inicial de los muelles con respecto a su elongación natural. Tomaremos como origen de coordenadas para medir el desplazamiento de cada objeto su posición en el instante inicial, por ello el valor inicial de la posición de los dos objetos es cero. De esta manera, el valor de la variable x de cada objeto indica su desplazamiento respecto a su posición en el instante inicial de la simulación.

Tal como puede verse en la tabla mostrada a continuación, las magnitudes físicas están expresadas en las unidades del sistema internacional. La descripción en lenguaje Modelica del modelo está en la página siguiente.

Magnitud	Unidades
m_1, m_2	kg
b_1, b_2, b_3	N/(m·s)
k_1, k_2, k_3	N/m
F, F_0	N
w	rad/s
x_1, x_2, e_1, e_2, e_3	m
v_1, v_2	m/s

```
model DosObjetosDeslizantes
  import SI = Modelica.SIunits;
  parameter SI.Mass m1=100 "Masa del objeto 1";
  parameter SI.Mass m2=10  "Masa del objeto 2";
  parameter SI.TranslationalDampingConstant b1=1.8 "Obj.1 - Suelo";
  parameter SI.TranslationalDampingConstant b2=3.2 "Obj.1 - Obj.2";
  parameter SI.TranslationalDampingConstant b3=1.8 "Obj.2 - Suelo";
  parameter SI.TranslationalSpringConstant k1=1.2 "Muelle 1";
  parameter SI.TranslationalSpringConstant k2=1.2 "Muelle 2";
  parameter SI.TranslationalSpringConstant k3=1.2 "Muelle 3";
  parameter SI.Force F0=10 "Amplitud de la fuerza externa";
  parameter SI.AngularFrequency w=0.1 "Frecuencia de la fuerza externa";
  SI.Position x1(start=0,fixed=true) "Posicion del objeto 1";
  SI.Position x2(start=0,fixed=true) "Posicion del objeto 2";
  SI.Velocity v1(start=0,fixed=true) "Velocidad del objeto 1";
  SI.Velocity v2(start=0,fixed=true) "Velocidad del objeto 2";
  SI.Length e1(start=1,fixed=true) "Muelle 1: elong - elongNatural";
  SI.Length e2(start=0,fixed=true) "Muelle 2: elong - elongNatural";
  SI.Length e3(start=0,fixed=true) "Muelle 3: elong - elongNatural";
  SI.Force F "Fuerza externa sobre Obj.1";
equation
  // Objeto 1
  der(x1) = v1;
  m1*der(v1) = - b1*v1 - b2*(v1 - v2) - k1*e1 + k2*e2 + F;
  // Objeto 2
  der(x2) = v2;
  m2*der(v2) = - b3*v2 - b2*(v2 - v1) - k2*e2 + k3*e3;
  // Muelle 1
  der(e1) = v1;
  // Muelle 2
  der(e2) = v2 - v1;
  // Muelle 3
  der(e3) = -v2;
  // Fuerza externa aplicada sobre el Objeto 1
  F = F0*sin(w*time);
end DosObjetosDeslizantes;
```

PREGUNTA 4 (2 puntos)

Se desea determinar la distribución estacionaria de temperatura ($temp$) de una lámina de MgO de forma rectangular, de dimensión 0.6 m por 0.4 m. La lámina tiene un agujero en el centro, cuyo radio es 0.1 m. La lámina está aislada y tiene una temperatura de 300 K y de 2300 K en los lados de longitud 0.4 m. La conductividad térmica de este material depende de la temperatura y en unidades del sistema internacional se calcula aplicando la fórmula $1500/temp$. Para acelerar la búsqueda de la solución, se ha de dar un valor inicial a la temperatura de 1300 K. Este problema se expresa matemáticamente como:

$$div(-k \cdot grad(temp)) = 0 \qquad \text{en} \quad \Omega = \left\{ x, y : \begin{array}{c} 0 \le x \le 0.6 \\ 0 \le y \le 0.4 \end{array} \right\}$$

Escriba un *script* para obtener un mapa de contorno de la distribución de temperatura empleando FlexPDE.

Solución a la Pregunta 4

El *script* se muestra a continuación.

```
TITLE   'Lamina de MgO con agujero,k(T)'
SELECT      errlim=1e-4     ngrid=1     spectral_colors
VARIABLES   temp
DEFINITIONS
   Lx=0.6     Ly=0.4     r0=0.1
   heat=0
   k=15000/temp                 { Conductividad termica k(T) }
INITIAL VALUES
   temp=1300
EQUATIONS
   div( -k*grad(temp))=heat
BOUNDARIES
region 'domain'
   start (0,0)   natural(temp)=0   line to (Lx,0)        { Aislado }
   value(temp)=300   line to (Lx,Ly)
   natural(temp)=0   line to (0,Ly)
   value(temp)=2300     line to close
   start (Lx/2-r0,Ly/2)   natural(temp)=0          { Agujero excluido }
   arc (center=Lx/2,Ly/2)   angle=360
PLOTS
   contour( temp)
END
```