

## **MÉTODOS DE SIMULACIÓN Y MODELADO**

### **Solución al Ejercicio de Autoevaluación**

#### **PREGUNTA 1 (2 puntos)**

Responda a las preguntas siguientes.

- 1.a** (1 punto) Indique la secuencia de pasos de que consta típicamente un estudio de simulación.
- 1.b** (1 punto) Dibuje el diagrama de flujo de un algoritmo para la simulación de modelos híbridos y explíquelo.

#### **Solución a la Pregunta 1**

- A** Véase la Figura 1.3 del texto base y las explicaciones de la misma.
- B** Véase la Figura 1.12 del texto base y las explicaciones de la misma.

**PREGUNTA 2** (2 puntos)

A continuación se muestra un modelo matemático, donde la variable  $t$  representa el tiempo.

$$\frac{dx_1}{dt} + a \cdot \frac{dx_2}{dt} = b \cdot x_1 - c \cdot x_2$$

$$\frac{dc}{dt} = -2 \cdot b \cdot c$$

$$x_1 \cdot \frac{dx_2}{dt} = -b \cdot x_2 + x_3$$

$$x_1 \cdot x_3 = z + x_2$$

$$z = z_0 \cdot \cos(w \cdot t)$$

$$a = 2.3 \cdot 10^{-3}$$

$$w = 10^{-2}$$

$$z_0 = 2.3 \cdot 10^{-4}$$

$$b = 9.87 \cdot 10^{-2}$$

- 2.a** (1 punto) Clasifique las variables del modelo en parámetros, variables de estado y variables algebraicas. A continuación, realice la asignación de la causalidad computacional. Explique detalladamente el procedimiento seguido para ello.
- 2.b** (1 punto) Escriba el diagrama de flujo del algoritmo para la simulación de este modelo. Emplee el método de integración de Euler explícito. Asigne el valor inicial que desee a las variables de estado. La condición de finalización de la simulación es que el tiempo simulado alcance el valor 10 s.

## Solución a la Pregunta 2

Las variables del modelo pueden clasificarse de la forma siguiente:

- Parámetros y constantes:  $a, w, z_0, b$
- Variables de estado:  $x_1, x_2, c$
- Variables algebraicas:  $z, x_3$

Para asignar la causalidad computacional al modelo, se sustituyen las derivadas de las variables de estado por variables mudas:

$$\frac{dx_1}{dt} \rightarrow derx1, \quad \frac{dx_2}{dt} \rightarrow derx2, \quad \frac{dc}{dt} \rightarrow derc$$

Omitiendo las ecuaciones en las que se asigna valor a los parámetros y las constantes, se obtiene el modelo siguiente:

$$derx1 + a \cdot derx2 = b \cdot x_1 - c \cdot x_2 \quad (1.1)$$

$$derc = -2 \cdot b \cdot c \quad (1.2)$$

$$x_1 \cdot derx2 = -b \cdot x_2 + x_3 \quad (1.3)$$

$$x_1 \cdot x_3 = z + x_2 \quad (1.4)$$

$$z = z_0 \cdot \cos(w \cdot t) \quad (1.5)$$

Las variables del modelo pueden clasificarse en conocidas (el tiempo, los parámetros, las constantes y las variables de estado) y desconocidas (las variables algebraicas y las derivadas de las variables de estado):

- Conocidas:  $t$   
 $a, w, z_0, b$   
 $x_1, x_2, c$
- Desconocidas:  $z, x_3$   
 $derx1, derx2, derc$

Con el fin de analizar si el modelo es *estructuralmente singular*, se comprueba que:

1. El número de ecuaciones y de variables desconocidas (incógnitas) es el mismo. Este modelo tiene 5 ecuaciones y 5 incógnitas:  $z, x_3, derx1, derx2, derc$ .
2. Cada incógnita puede emparejarse con una ecuación en que aparezca y con la cual no se haya emparejado ya otra incógnita.

$$derx1 \rightarrow derx1 + a \cdot derx2 = b \cdot x_1 - c \cdot x_2 \quad \text{Ec. (1.1)}$$

$$derc \rightarrow derc = -2 \cdot b \cdot c \quad \text{Ec. (1.2)}$$

$$derx2 \rightarrow x_1 \cdot derx2 = -b \cdot x_2 + x_3 \quad \text{Ec. (1.3)}$$

$$x_3 \rightarrow x_1 \cdot x_3 = z + x_2 \quad \text{Ec. (1.4)}$$

$$z \rightarrow z = z_0 \cdot \cos(w \cdot t) \quad \text{Ec. (1.5)}$$

Finalmente, las ecuaciones del modelo, con la asignación de la causalidad computacional señalada, son las siguientes:

$$[derx1] + a \cdot derx2 = b \cdot x_1 - c \cdot x_2$$

$$[derc] = -2 \cdot b \cdot c$$

$$x_1 \cdot [derx2] = -b \cdot x_2 + x_3$$

$$x_1 \cdot [x_3] = z + x_2$$

$$[z] = z_0 \cdot \cos(w \cdot t)$$

El modelo ordenado y resuelto es el siguiente (existen otras posibles ordenaciones de las ecuaciones que son igualmente válidas):

$$[z] = z_0 \cdot \cos(w \cdot t)$$

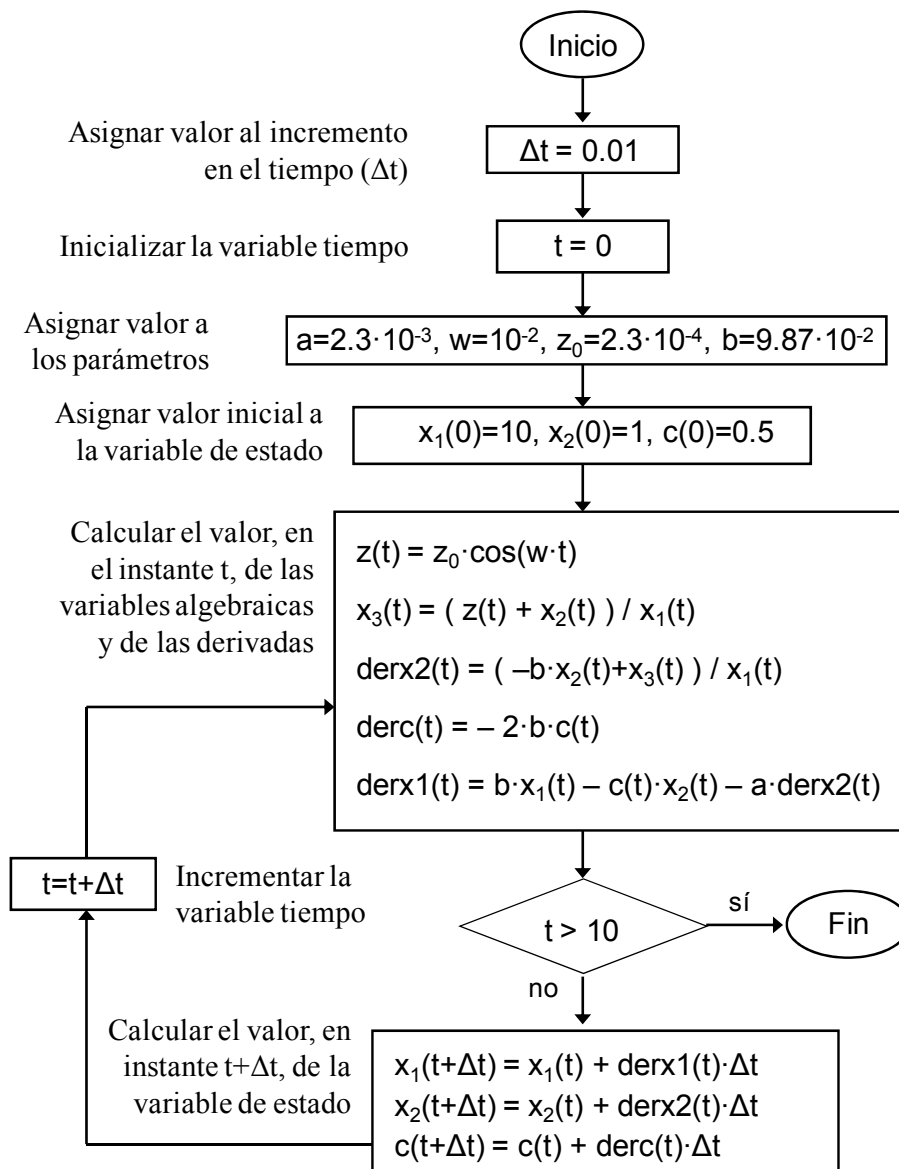
$$[x_3] = \frac{z + x_2}{x_1}$$

$$[derx2] = \frac{-b \cdot x_2 + x_3}{x_1}$$

$$[derc] = -2 \cdot b \cdot c$$

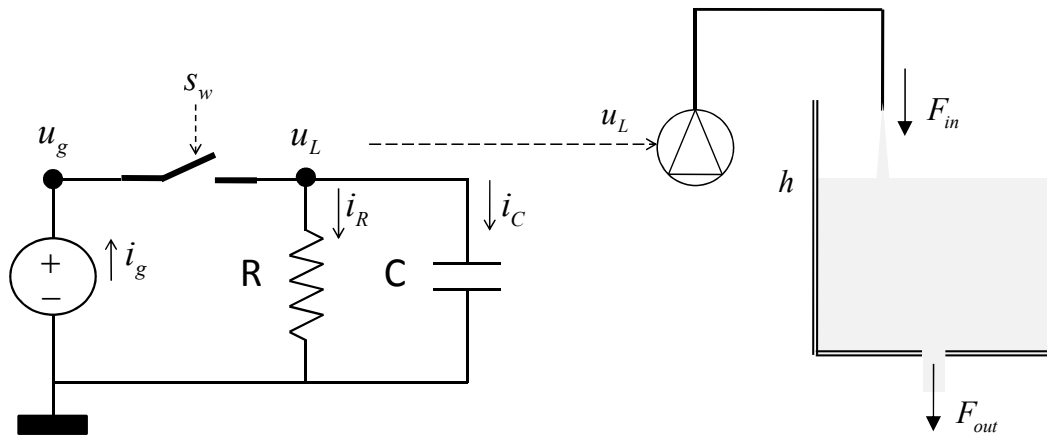
$$[derx1] = b \cdot x_1 - c \cdot x_2 - a \cdot derx2$$

En la figura siguiente se muestra el diagrama de flujo para la simulación del modelo, empleando el método de integración de Euler explícito y considerando como condición de finalización que el tiempo simulado alcance el valor 10 s. Se han asignado valores arbitrarios a los valores iniciales de las variables de estado.



**PREGUNTA 3** (4 puntos)

En la figura se muestra un sistema compuesto por un circuito eléctrico y un sistema hidráulico.



El circuito eléctrico está compuesto por un generador de corriente sinusoidal, un interruptor no ideal, una resistencia y un condensador. El interruptor es controlado por la variable Booleana  $S_w$ , cuyo valor cambia cada  $T_w$  segundos, siendo este intervalo de tiempo un parámetro del modelo. El interruptor tiene una resistencia grande ( $R_{w1}$ ) cuando está abierto y una resistencia pequeña ( $R_{w2}$ ) cuando está cerrado. Estas dos resistencias son parámetros del modelo. La resistencia ( $R$ ) y la capacidad ( $C$ ) del condensador son parámetros del modelo, al igual que lo son la amplitud ( $I_0$ ) y frecuencia ( $w$ ) del generador de corriente.

El sistema hidráulico está compuesto por una fuente de líquido y un depósito. El voltaje entre los bornes del condensador ( $u_L$ ) es aplicado a la fuente de líquido. Mientras  $u_L > 0$ , el flujo másico de líquido que sale de la fuente ( $F_{in}$ ) es proporcional a  $u_L$ . Mientras  $u_L \leq 0$ , el flujo  $F_{in}$  es cero.

El líquido que sale de la fuente, entra en el depósito. La variable  $h$  representa la altura del líquido acumulado en el depósito. En la base del depósito hay un orificio, a través del cual sale líquido. El flujo másico de líquido  $F_{out}$  que sale a través del orificio es proporcional a la raíz cuadrada de la altura del líquido almacenado en el depósito.

**3.a** (2 puntos) Escriba las ecuaciones del modelo. Indique el significado y las unidades de cada una de las variables del modelo. Puede realizar las hipótesis y aproximaciones que desee, siempre que no estén en contradicción con la descripción del sistema dada en el enunciado.

**3.b** (2 puntos) Describa el modelo en Modelica como un modelo atómico.

### Solución a la Pregunta 3

El significado y las unidades de cada una de las variables dependientes del tiempo está indicado en la tabla mostrada a continuación.

| Símbolo   | Significado                              | Unidades |
|-----------|------------------------------------------|----------|
| $t$       | Tiempo                                   | s        |
| $u_g$     | Voltaje del generador de corriente       | V        |
| $u_L$     | Voltaje entre los bornes del condensador | V        |
| $i_g$     | Corriente del generador                  | A        |
| $i_R$     | Corriente de la resistencia              | A        |
| $i_C$     | Corriente del condensador                | A        |
| $R_{sw}$  | Resistencia del interruptor              | ohm      |
| $S_w$     | Variable de control del interruptor      |          |
| $F_{in}$  | Flujo másico entrante al depósito        | kg/s     |
| $F_{out}$ | Flujo másico saliente al depósito        | kg/s     |
| $m$       | Masa de líquido en el depósito           | kg       |
| $h$       | Altura de líquido en el depósito         | m        |

A continuación se muestran las constantes y parámetros del modelo.

| Símbolo  | Significado                         | Unidades          |
|----------|-------------------------------------|-------------------|
| $I_0$    | Amplitud del generador de corriente | A                 |
| $w$      | Frecuencia angular del generador    | rad/s             |
| $R_{w1}$ | Resistencia del interruptor abierto | ohm               |
| $R_{w2}$ | Resistencia del interruptor cerrado | ohm               |
| $T_w$    | Periodo del interruptor             | s                 |
| $R$      | Resistencia                         | ohm               |
| $C$      | Capacidad                           | F                 |
| $k_f$    | Parámetro de la fuente              | kg/(s·V)          |
| $A$      | Área de la base del tanque          | m <sup>2</sup>    |
| $a$      | Área del agujero                    | m <sup>2</sup>    |
| $\rho$   | Densidad del líquido                | kg/m <sup>3</sup> |
| $g$      | Aceleración gravitatoria            | m/s <sup>2</sup>  |

El modelo del circuito eléctrico es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 i_g &= I_0 \cdot \sin(w \cdot t) \\
 u_g - u_L &= i_g \cdot R_{sw} \\
 R_{sw} &= \begin{cases} R_{w1} & \text{si } S_w \\ R_{w2} & \text{si not } S_w \end{cases} \\
 u_L &= i_R \cdot R \\
 C \cdot \frac{du_L}{dt} &= i_C \\
 i_g &= i_R + i_C
 \end{aligned}$$

La variable Booleana  $S_w$  cambia de valor cada  $T_w$  segundos:

```

when sample(0,  $T_w$ ) then
     $S_w = \text{not pre}(S_w)$ 
end when

```

El modelo del sistema fuente-depósito es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 F_{in} &= \text{máx}(0, k_f \cdot u_L) \\
 F_{out} &= a \cdot \rho \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \\
 \frac{dm}{dt} &= F_{in} - F_{out} \\
 m &= \rho \cdot A \cdot h
 \end{aligned}$$

A continuación se muestra la descripción en Modelica del modelo. Se han asignado valores arbitrarios a los parámetros y a las condiciones iniciales.

```

model circHyd
  import SI = Modelica.SIunits;
  import Modelica.Math.*;
  constant SI.Acceleration g=9.81 "Aceleración gravitatoria";
  // Depósito
  parameter SI.Area a=0.1 "Sección del agujero";
  parameter SI.Area A=2 "Sección del depósito";
  // Fuente
  parameter Real kf(unit="kg/(s.V)")=100 "Parám. de la fuente";
  // Líquido
  parameter SI.Density rho=1000 "Densidad del líquido";
  // Generador de corriente
  parameter SI.Current I0 = 5 "Amplitud del generador";
  parameter SI.Frequency w = 50 "Frecuencia del generador";
  // Interruptor
  parameter SI.Resistance Rw1 = 1e5 "Resist. interruptor abierto";
  parameter SI.Resistance Rw2=1e-2 "Resist. interruptor cerrado";
  parameter SI.Time Tw = 0.2 "Periodo del interruptor";
  // Resistencia
  parameter SI.Resistance R = 10 "Resistencia de resistor";
  // Condensador
  parameter SI.Capacitance C = 1e-6 "Capacidad del condensador";
  // Parte eléctrica
  SI.Voltage ug(start=0,fixed=true) "Voltaje del generador";
  SI.Current ig "Corriente del generador";
  SI.Current iR "Corriente en la resistencia";
  SI.Current iC "Corriente en el condensador";
  SI.Voltage uL "Voltaje del condensador";
  SI.Resistance Rsw "Resistencia del interruptor";
  Boolean Sw(start=false,fixed=true);
  // Parte hidráulica
  SI.MassFlowRate Fin "Flujo másico de entrada al depósito";
  SI.MassFlowRate Fout "Flujo másico de salida del depósito";
  SI.Height h "Nivel en el depósito";
  SI.Mass m(start=1e3,fixed=true) "Masa de líquido";
equation
  // Parte eléctrica
  ig = I0*sin(w*time);
  ug-uL=ig*Rsw;
  Rsw = if Sw then Rw1 else Rw2;
  uL = iR*R;
  C*der(uL) = iC;
  ig = iR+iC;
  when sample(0,Tw) then
    Sw = not pre(Sw);
  end when;
  // Parte hidráulica
  der(m) = Fin - Fout;
  m = rho*A*h;
  Fout = a*rho*sqrt(2*g*h);
  Fin = max(0, kf*uL);
end circHyd;

```

**PREGUNTA 4** (2 puntos)

Se desea determinar la distribución estacionaria de temperatura (*temp*) de una lámina delgada de metal, con forma rectangular, que mide 1 m de largo y 0.5 m de alto. La lámina está aislada y tiene una temperatura de 410 K y de 320 K, respectivamente, en cada uno de los lados que mide 0.5 m. La conductividad térmica es 1 W/(m°C).

Este problema se expresa matemáticamente como:

$$\frac{\partial^2 temp}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 temp}{\partial y^2}(x, y) = 0 \quad \text{en } \Omega = \left\{ x, y : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 0.5 \end{array} \right\}$$

Escriba un *script* para obtener un mapa de contorno de la distribución de temperatura empleando FlexPDE.

**Solución a la Pregunta 4**

```

TITLE 'Flujo de calor'
COORDINATES cartesian2  ! Sistema de coordenadas
VARIABLES
    temp                !temperatura
DEFINITIONS          !parametros
    k = 1  !Conductividad termica
    L = 1  !Longitud del material
    W = 0.5 !Anchura del material
EQUATIONS
    temp:div(-K*grad(temp))=0 !Ec de calor sin fuentes de calor
BOUNDARIES          { Definicion del dominio }
    REGION 1
        START(0,0)
        NATURAL(temp)=0 LINE TO (L,0)  !Flujo de Q 0
        VALUE(temp) = 320 LINE TO (L,W)
        NATURAL (temp) = 0 LINE TO (0,W) !Flujo de Q 0
        VALUE(temp) = 410 LINE TO CLOSE
PLOTS                !Salida grafica
    CONTOUR(temp)
END

```