

CONTROL MULTIVARIABLE

Fernando Morilla García

Dpto. de Informática y Automática

fmorilla@dia.uned.es

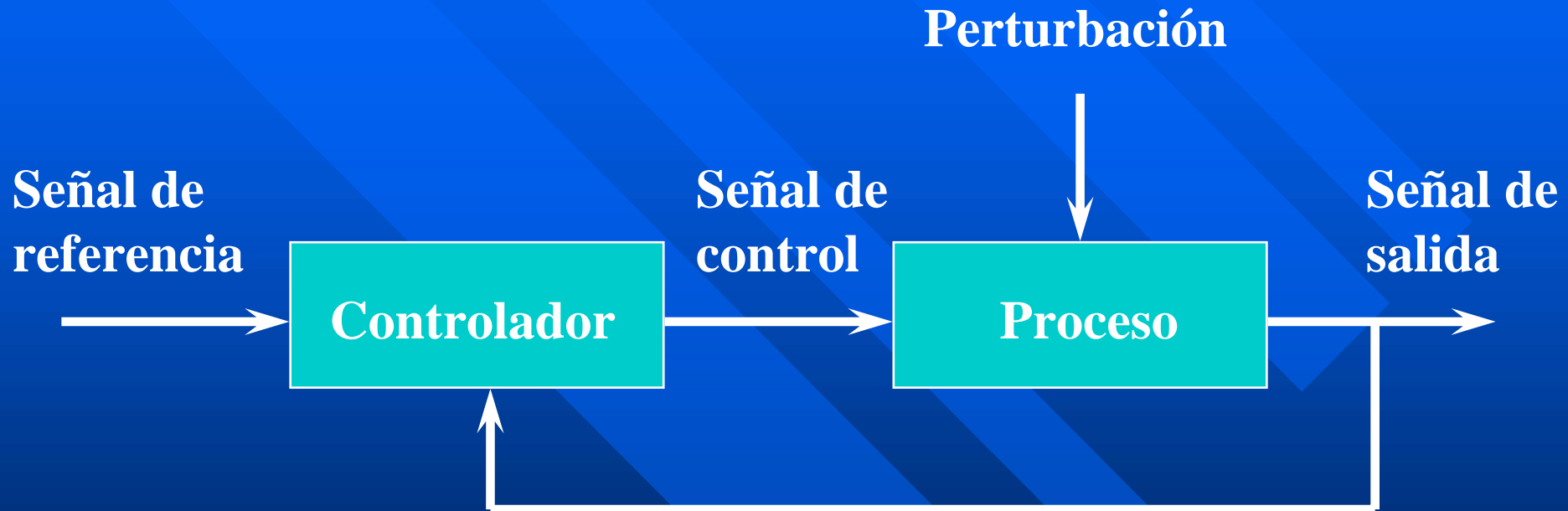
Contenido

- Tema 1: Introducción al control multivariable
- Tema 2 : Medidas de interacción
- Tema 3 : Control descentralizado
- Tema 4 : Control centralizado

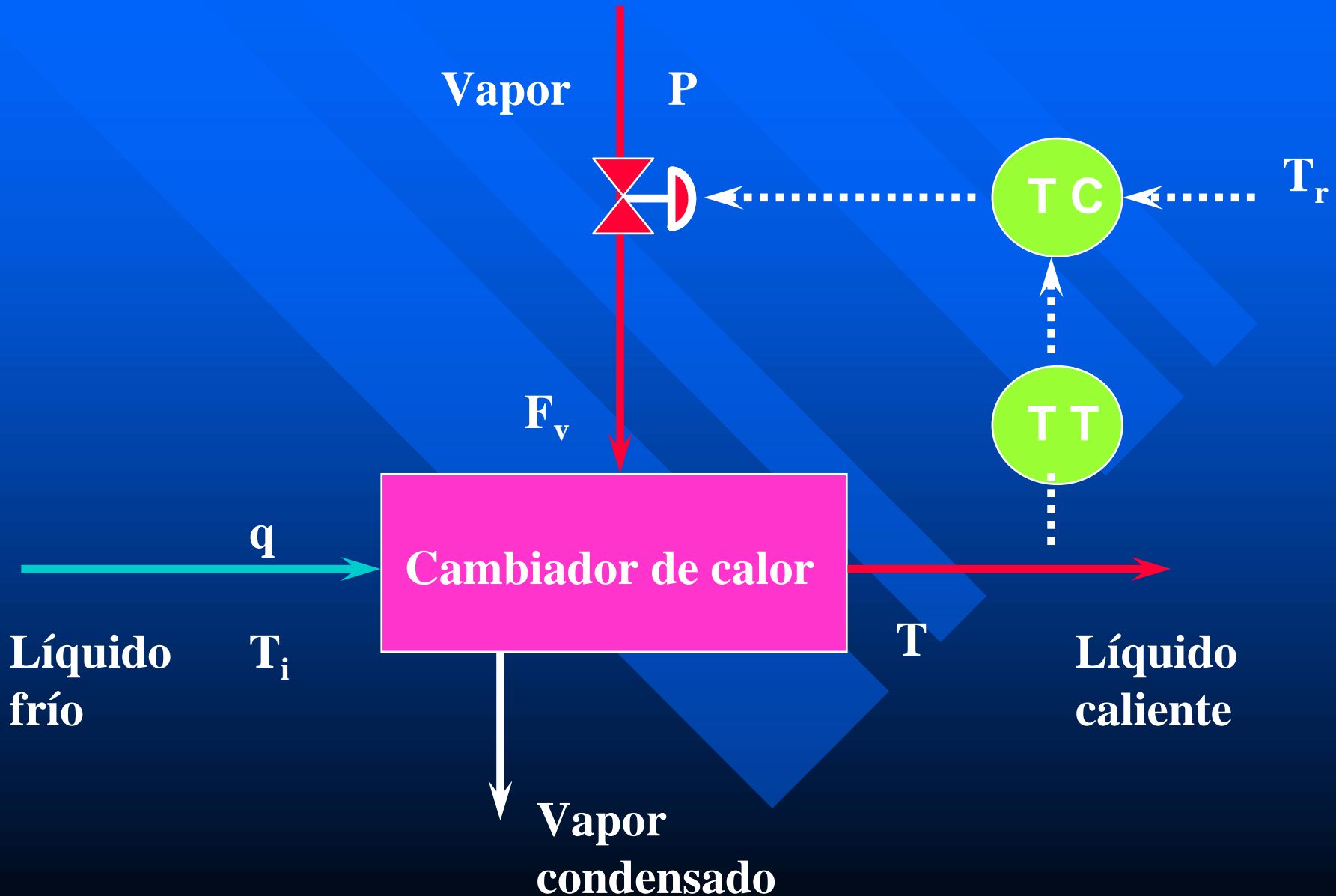
PROCESO MULTIVARIABLE



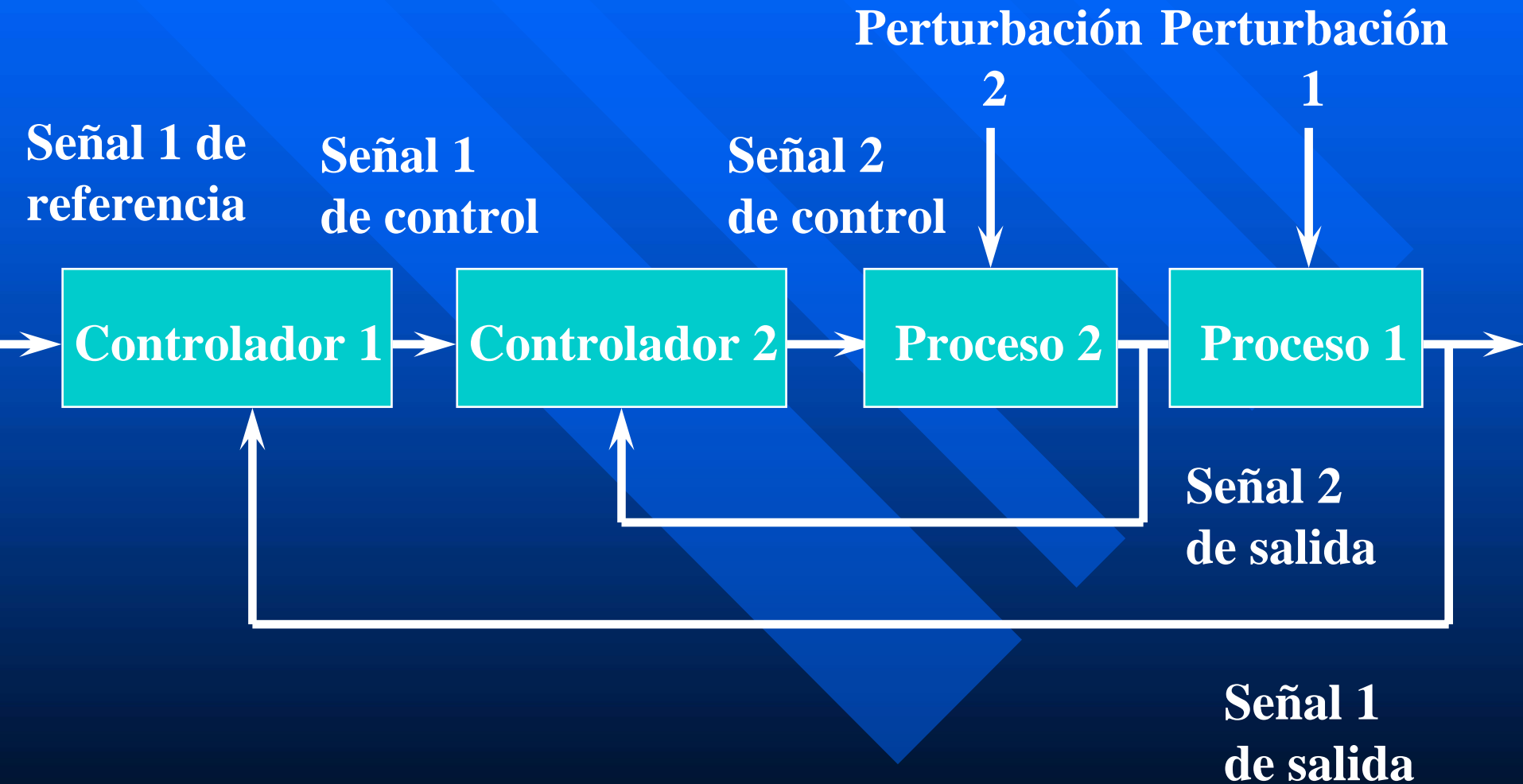
LAZO CONVENCIONAL



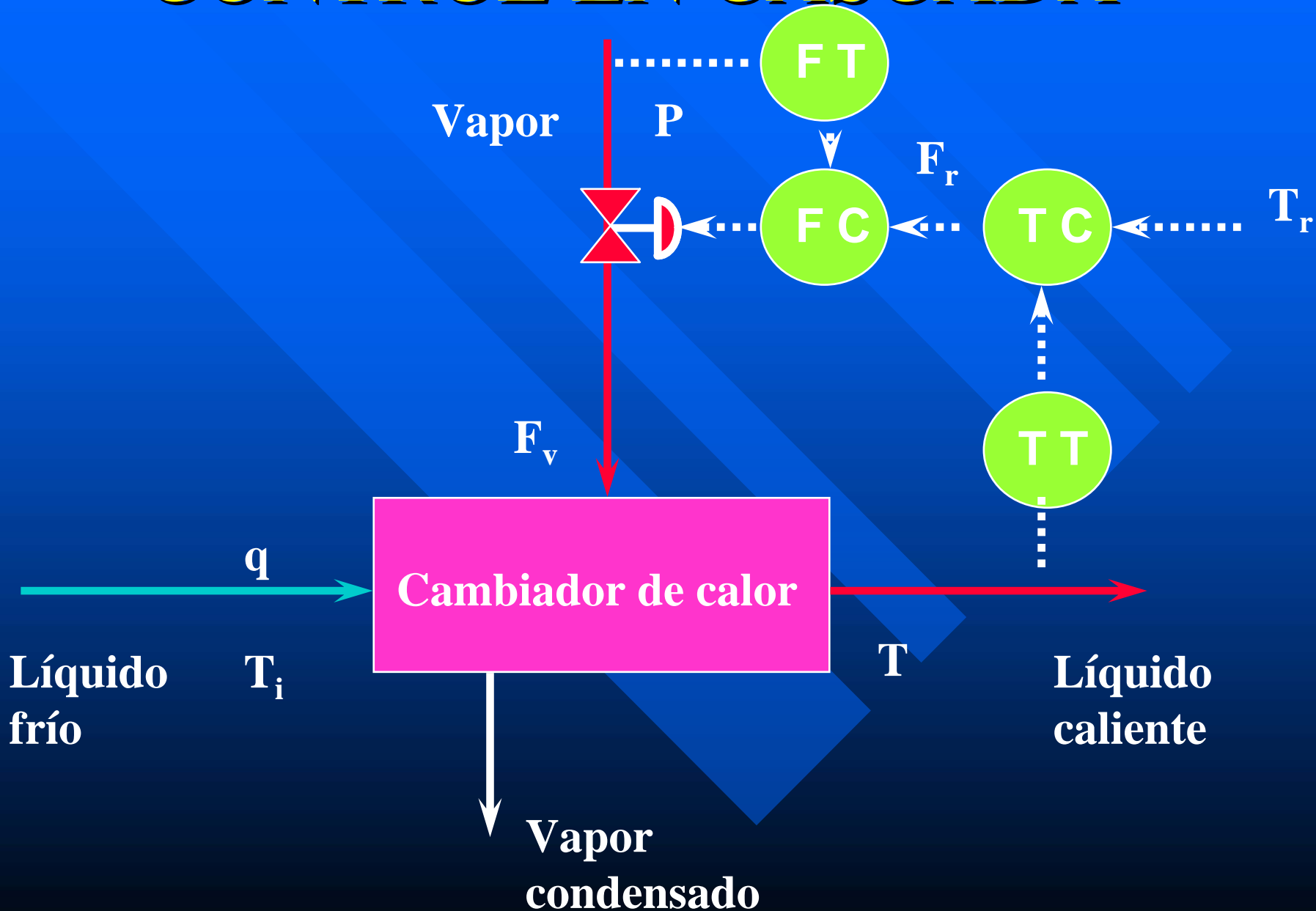
CONTROL CONVENCIONAL



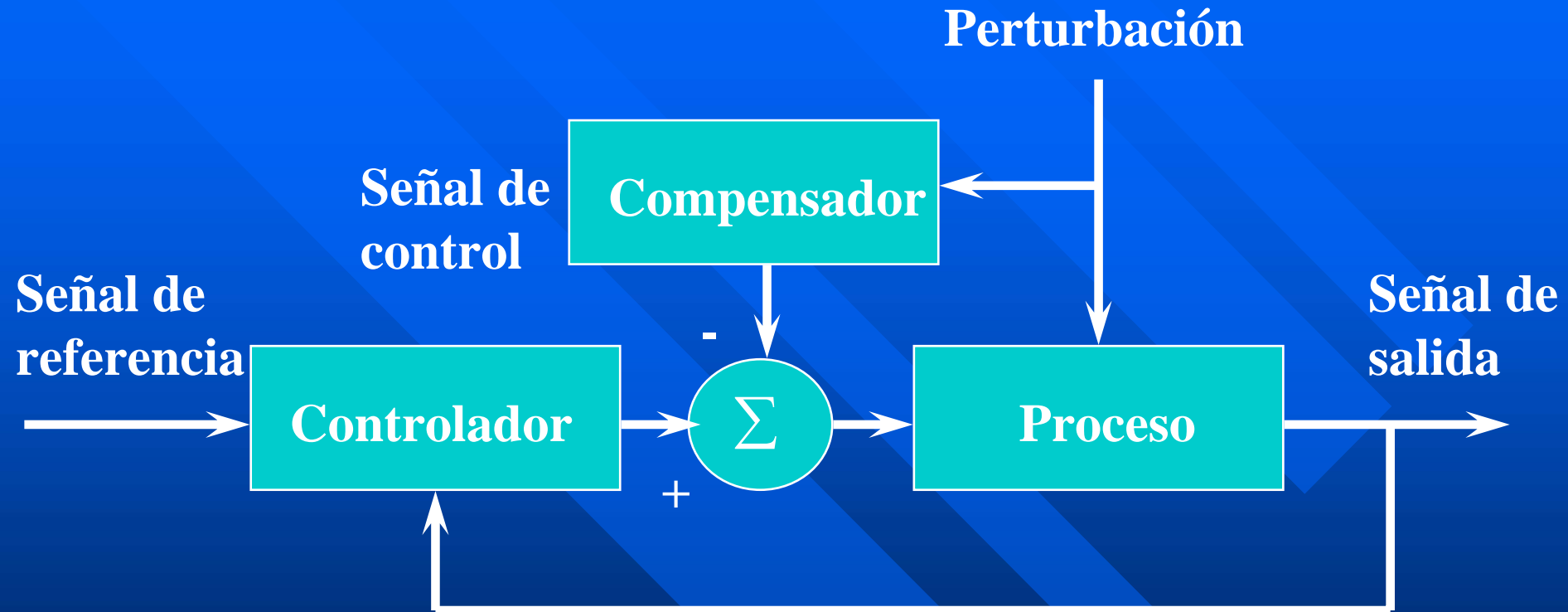
LAZOS EN CASCADA



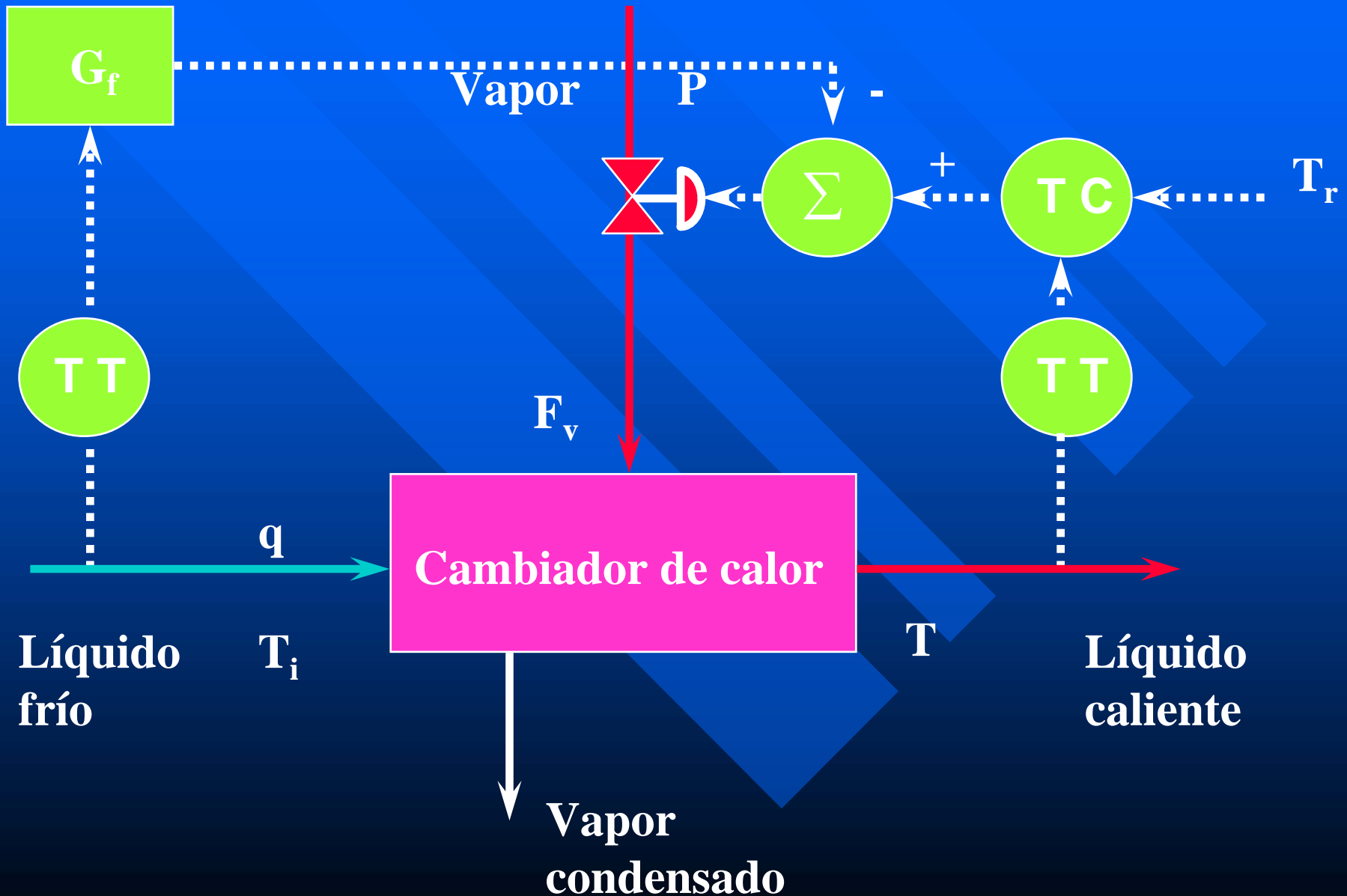
CONTROL EN CASCADA



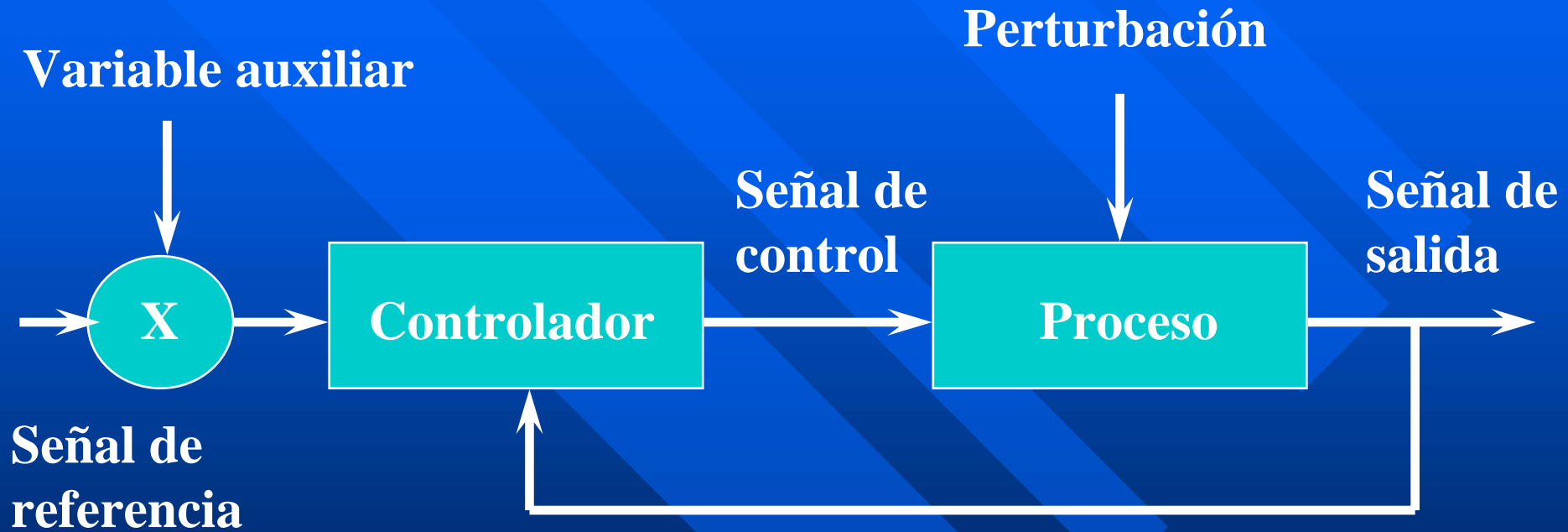
LAZO CON FEEDFORWARD



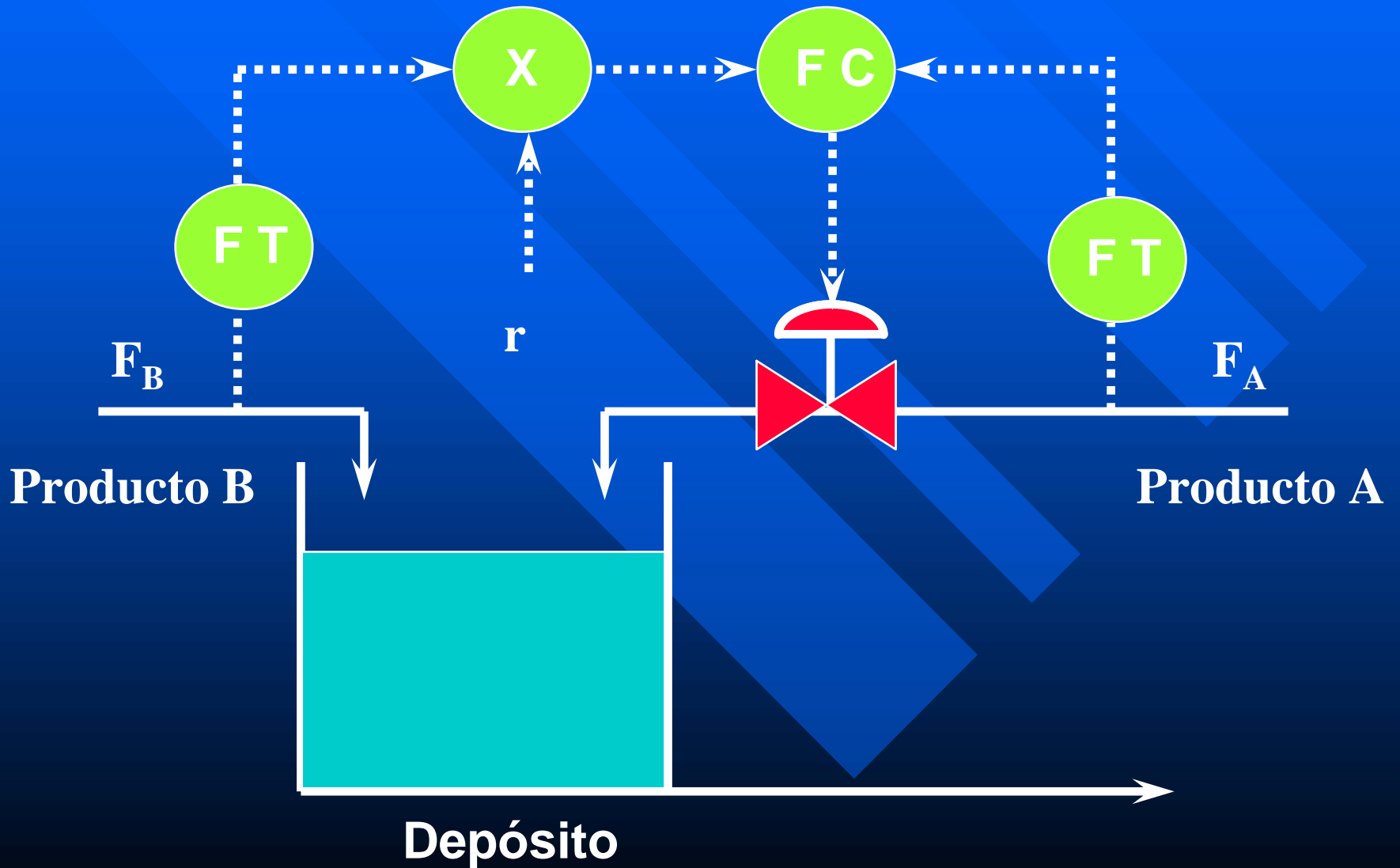
CONTROL FEEDFORWARD



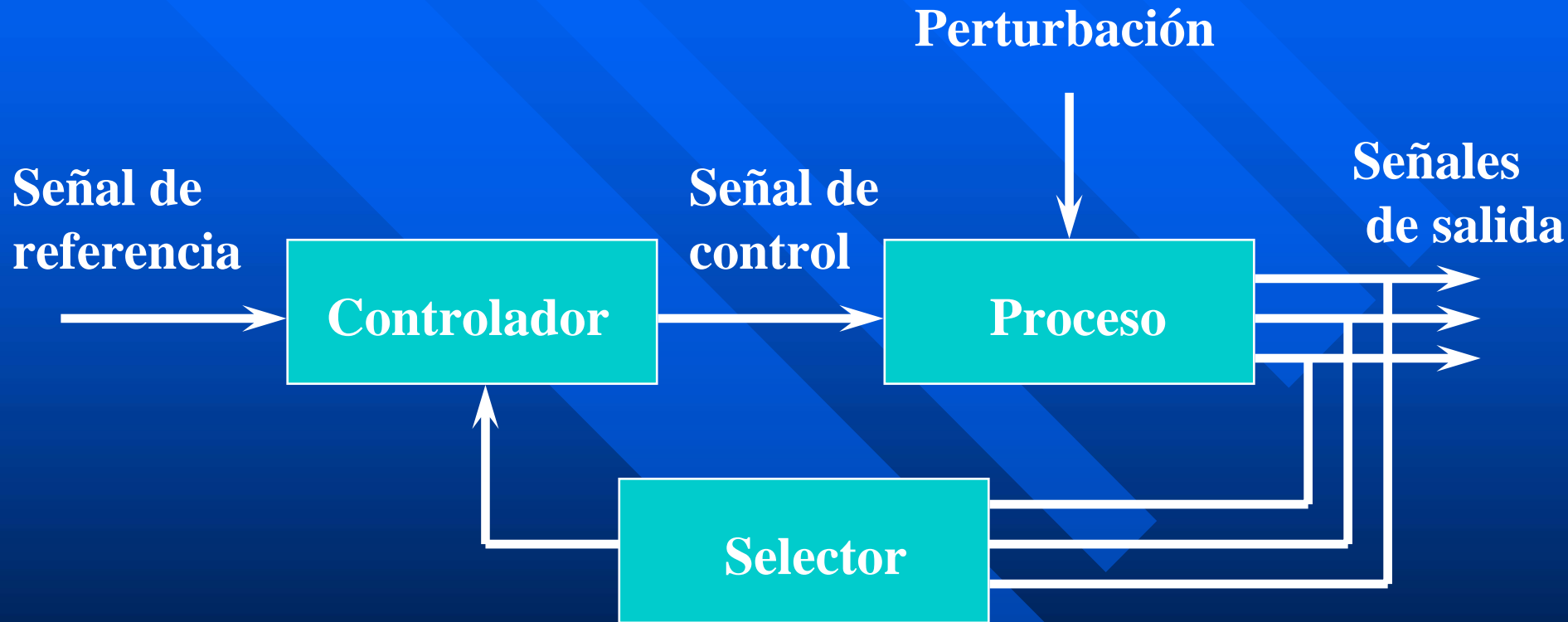
LAZO RATIO



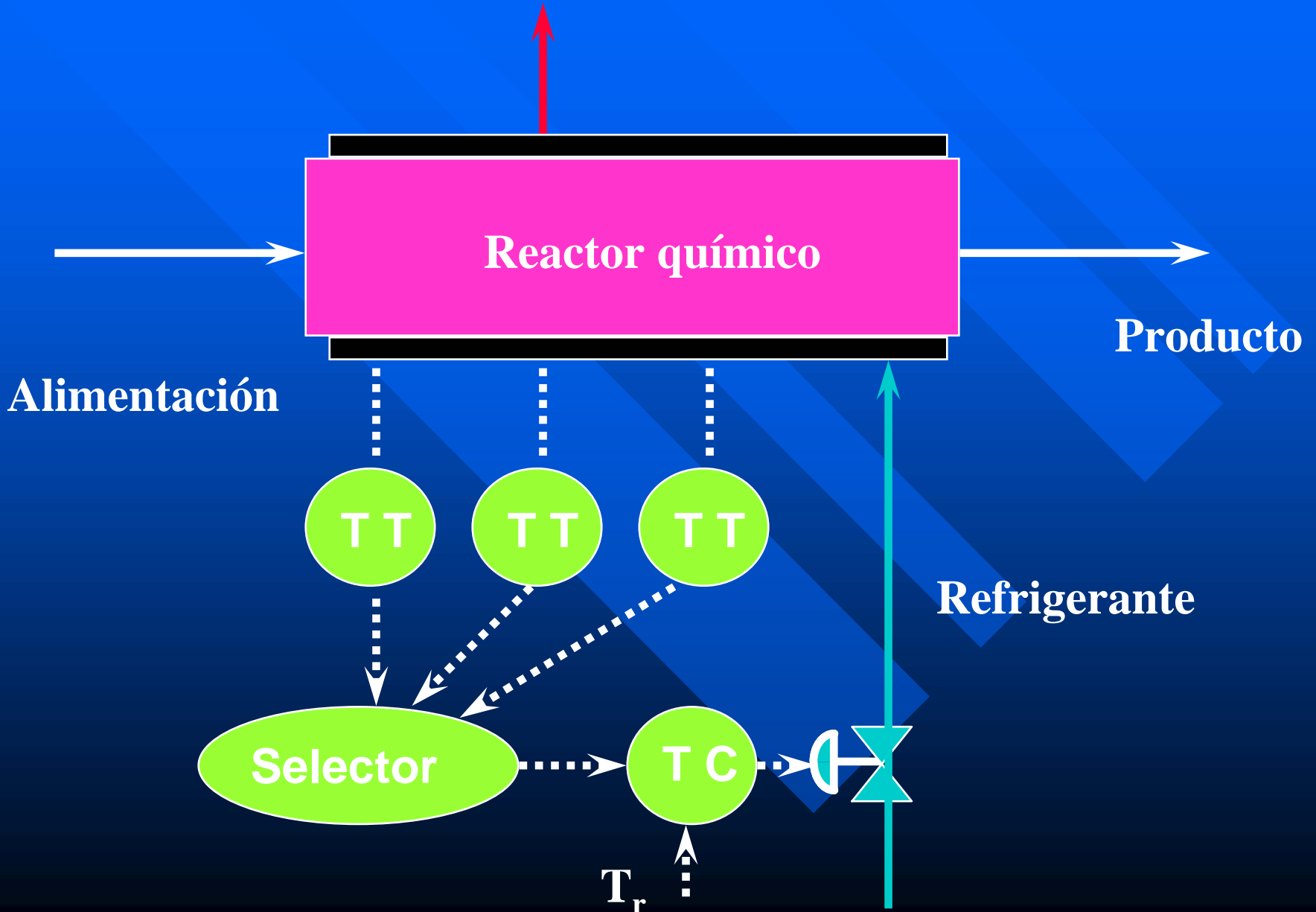
CONTROL RATIO



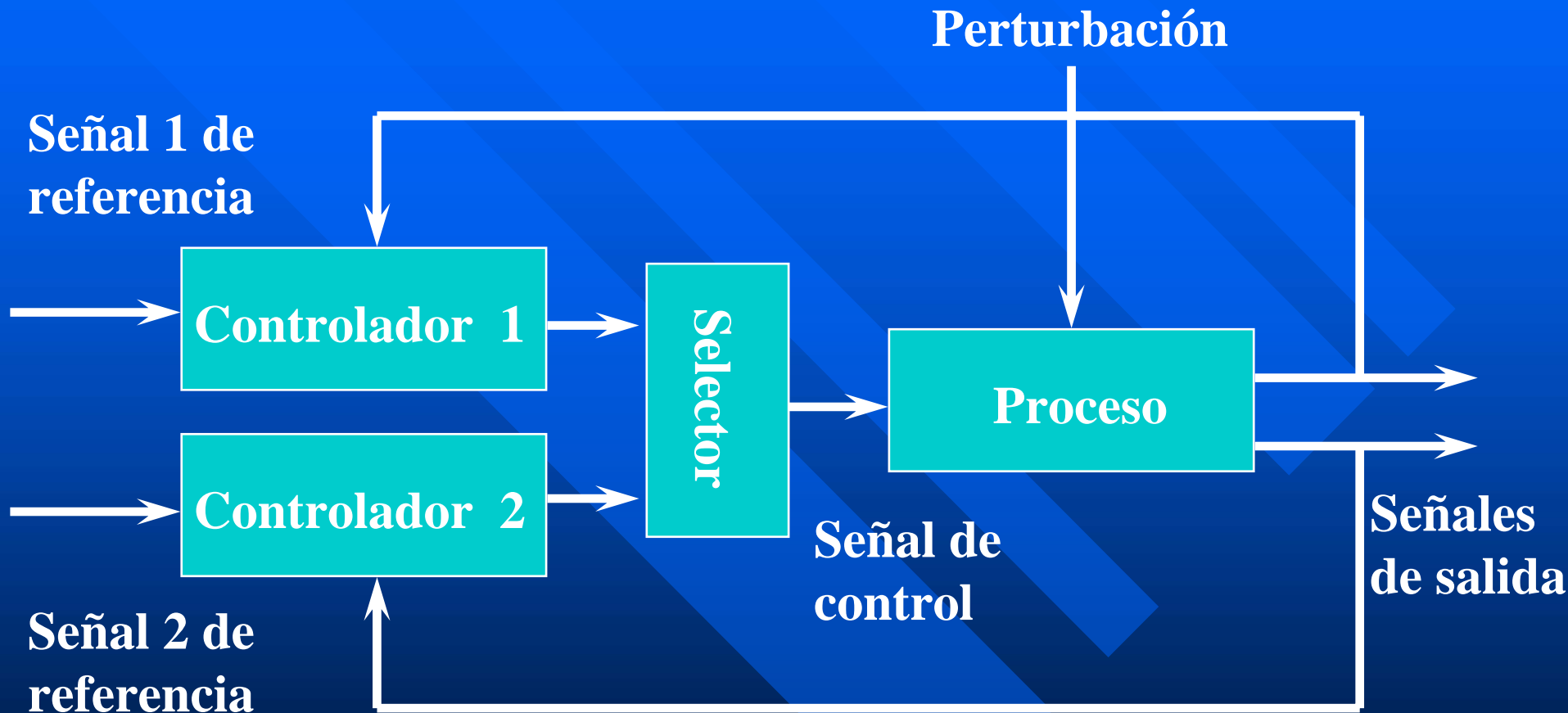
LAZO SELECTIVO



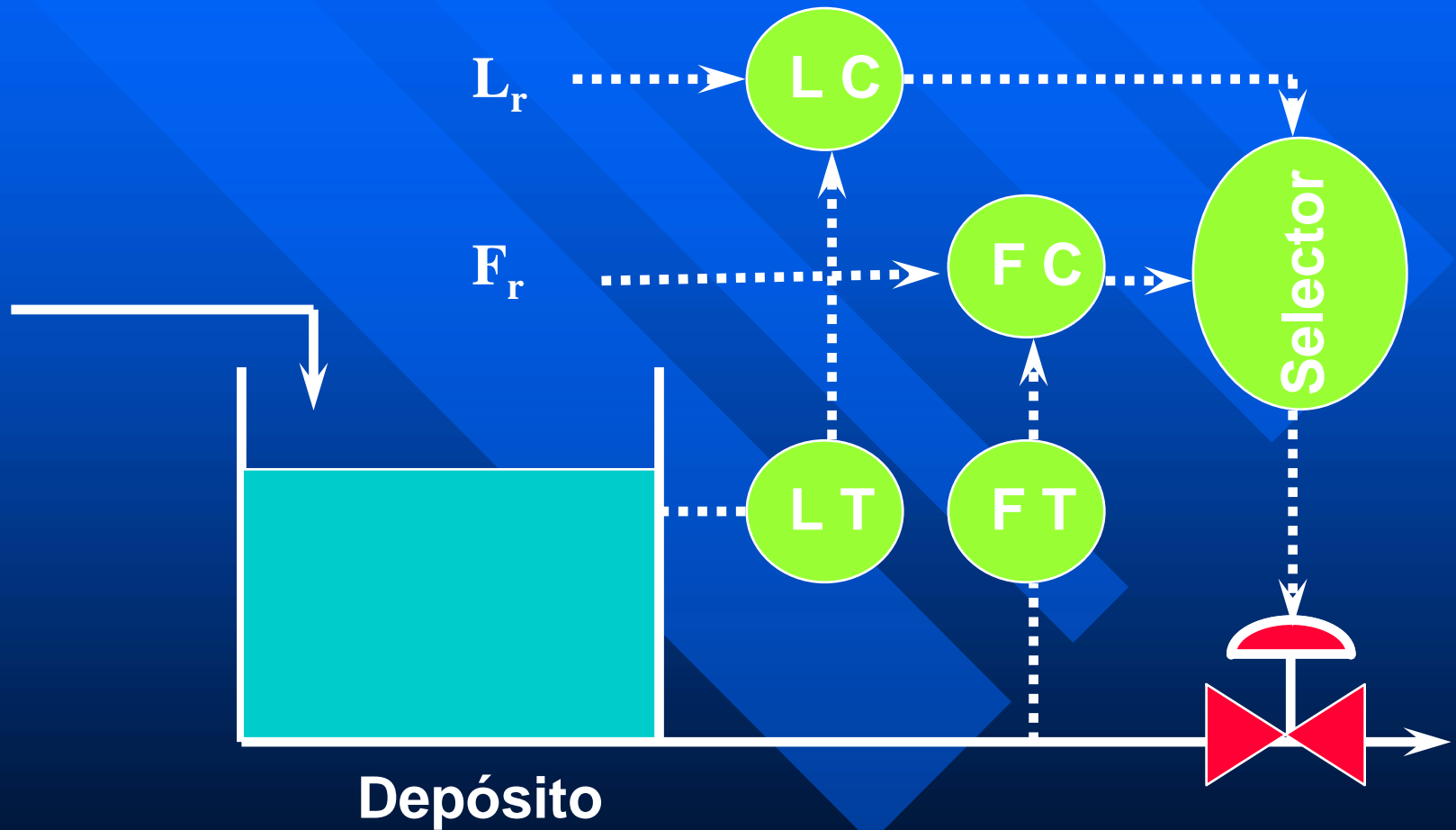
CONTROL SELECTIVO



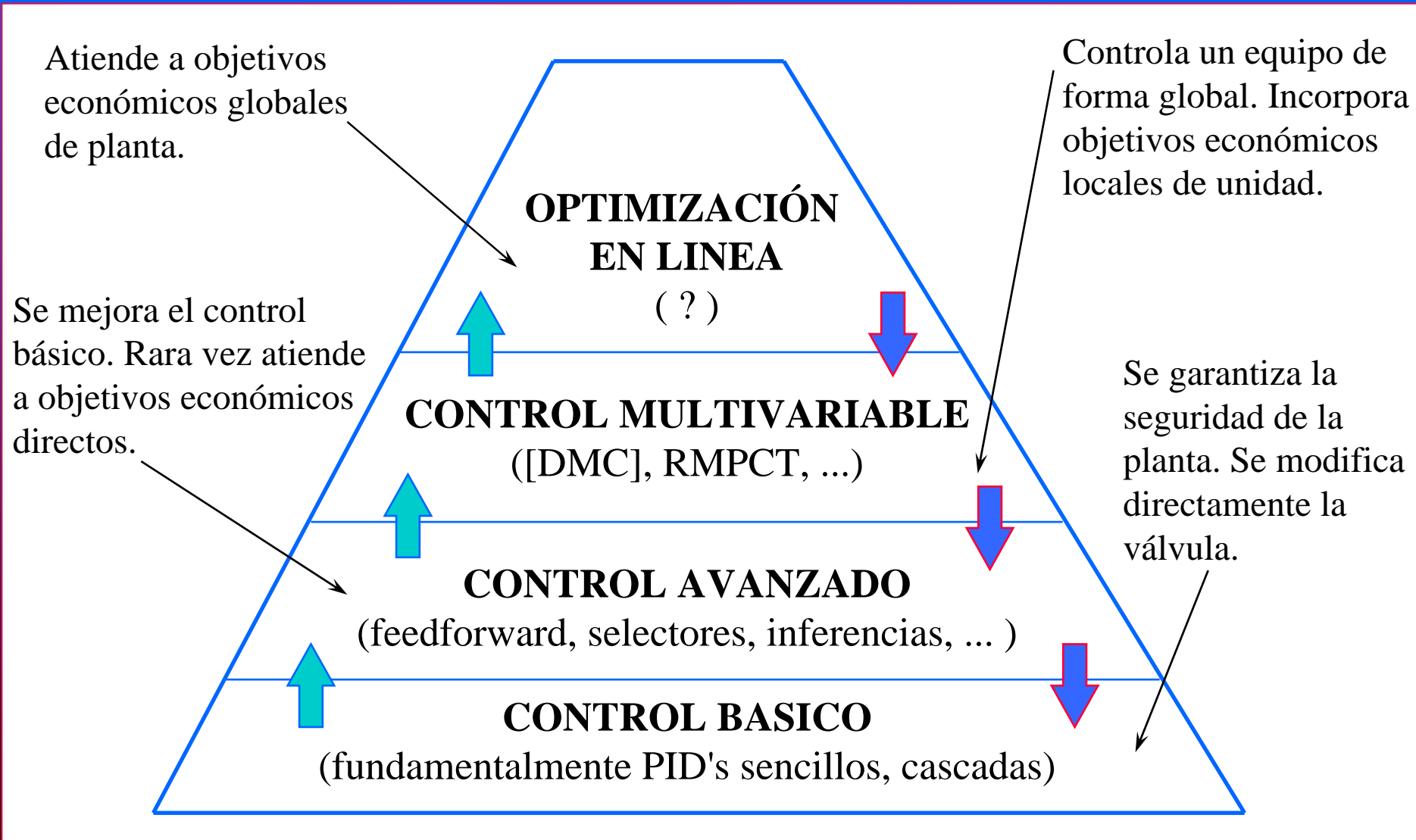
LAZO OVERRIDE



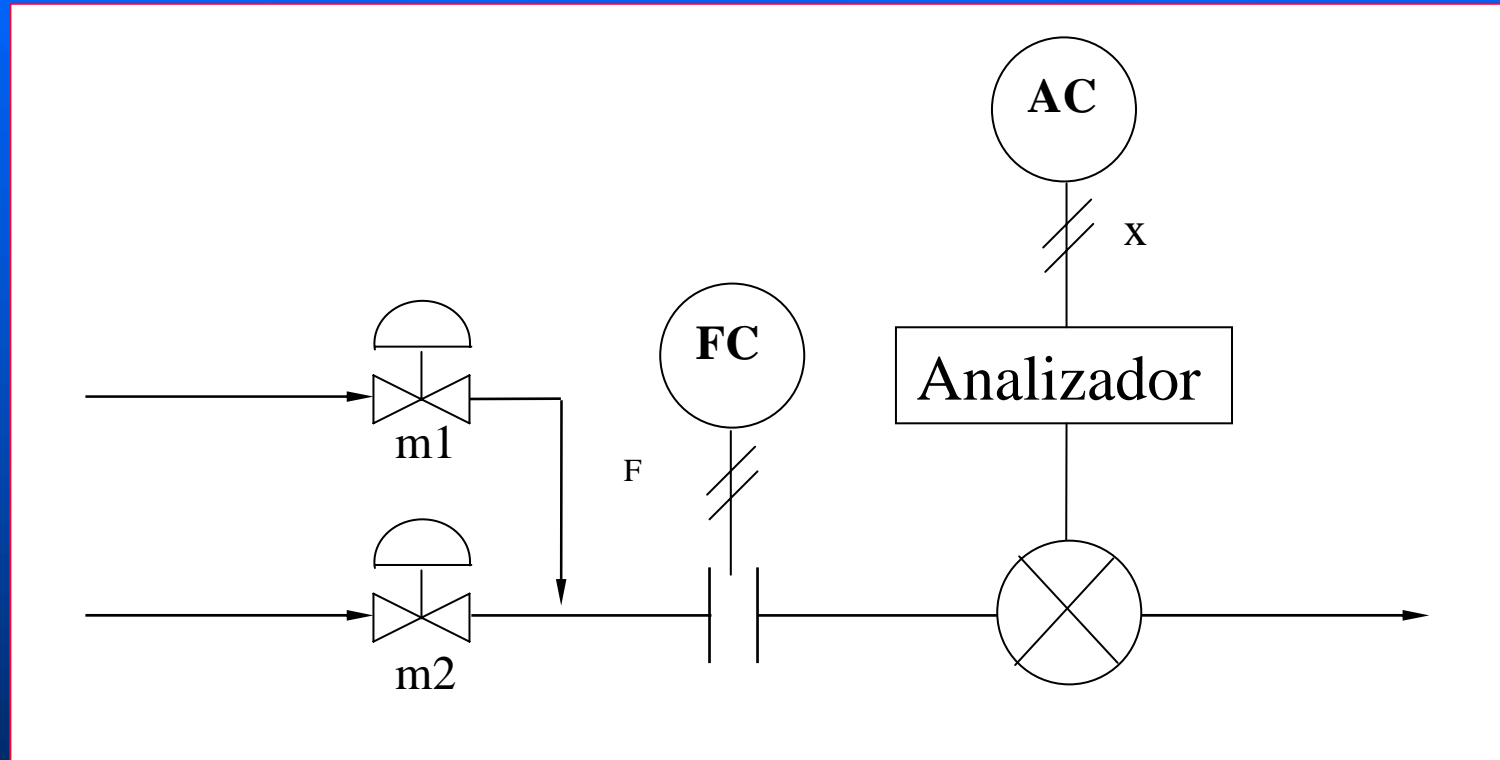
CONTROL OVERRIDE



NIVELES DE AUTOMATIZACIÓN

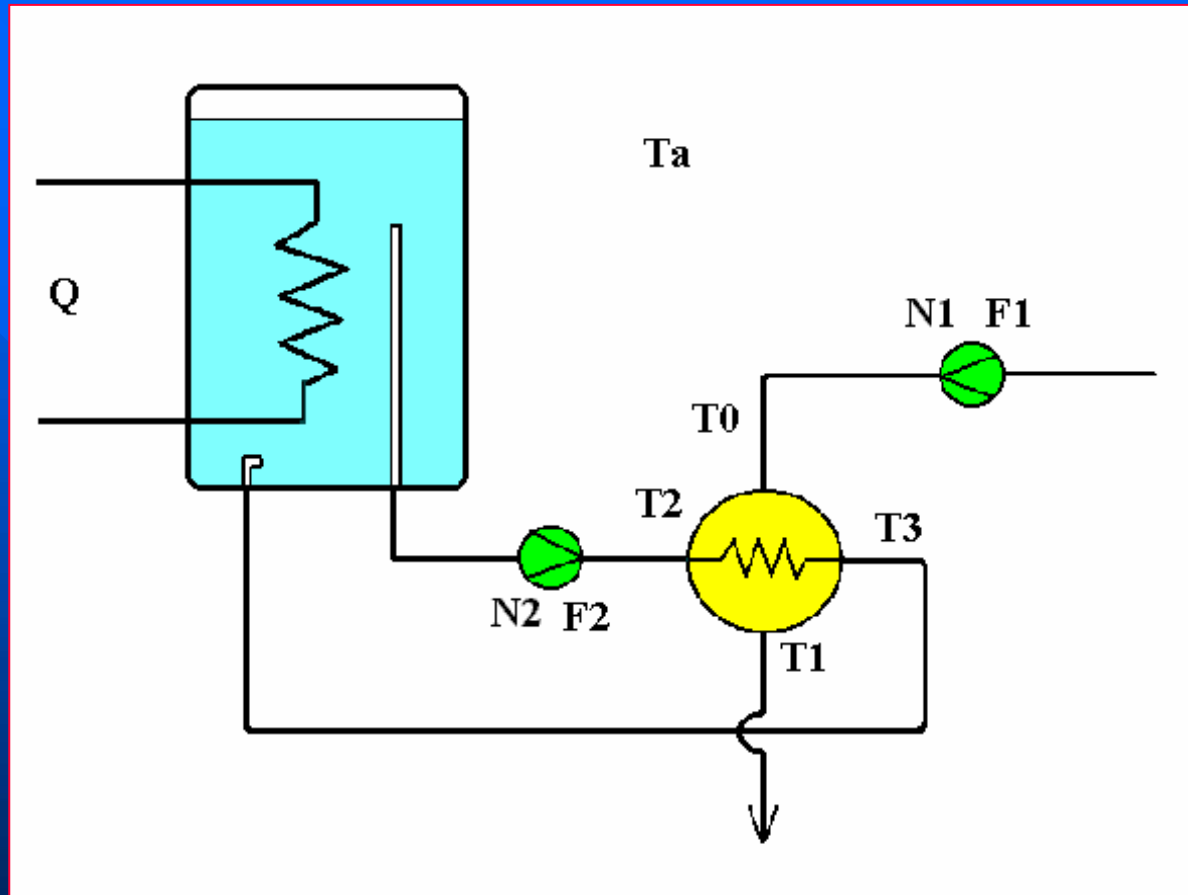


PROCESOS MULTIVARIABLES



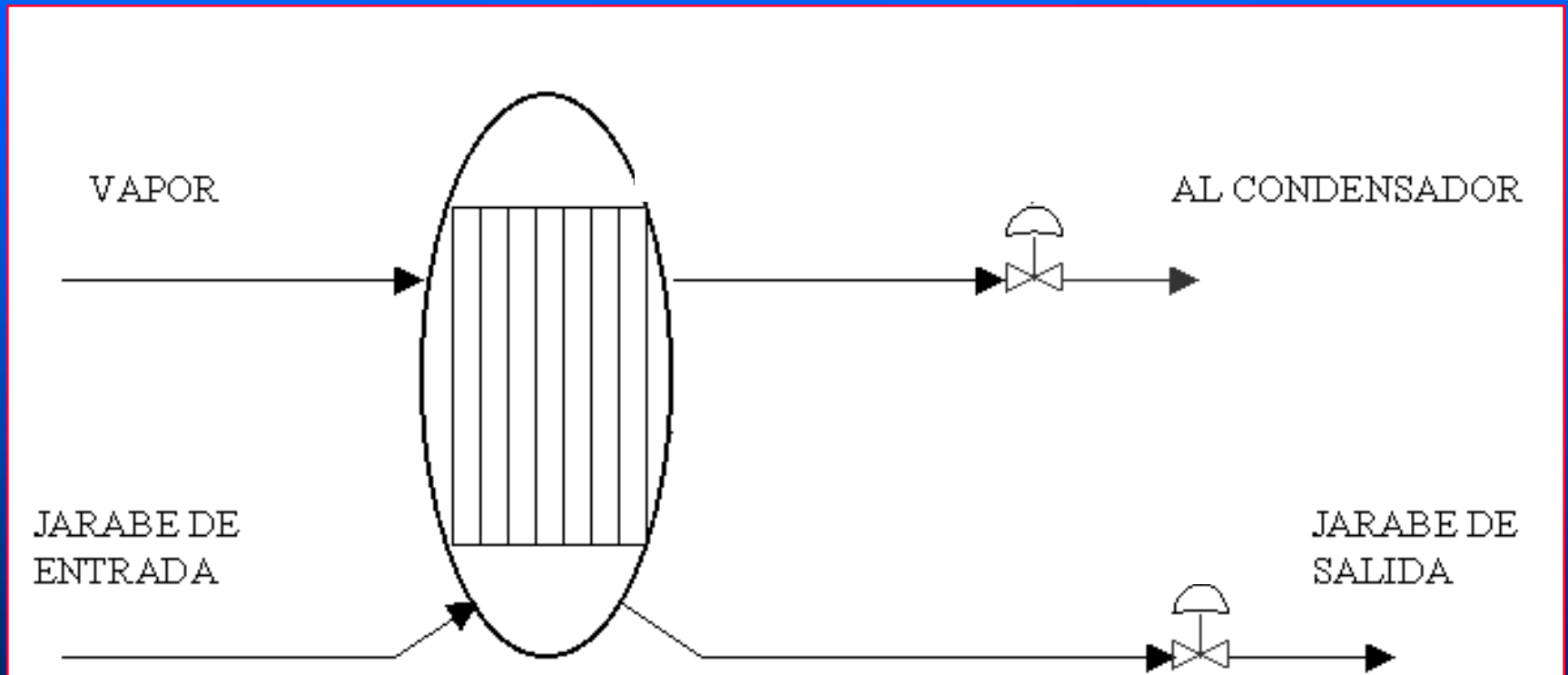
Proceso de mezcla

PROCESOS MULTIVARIABLES



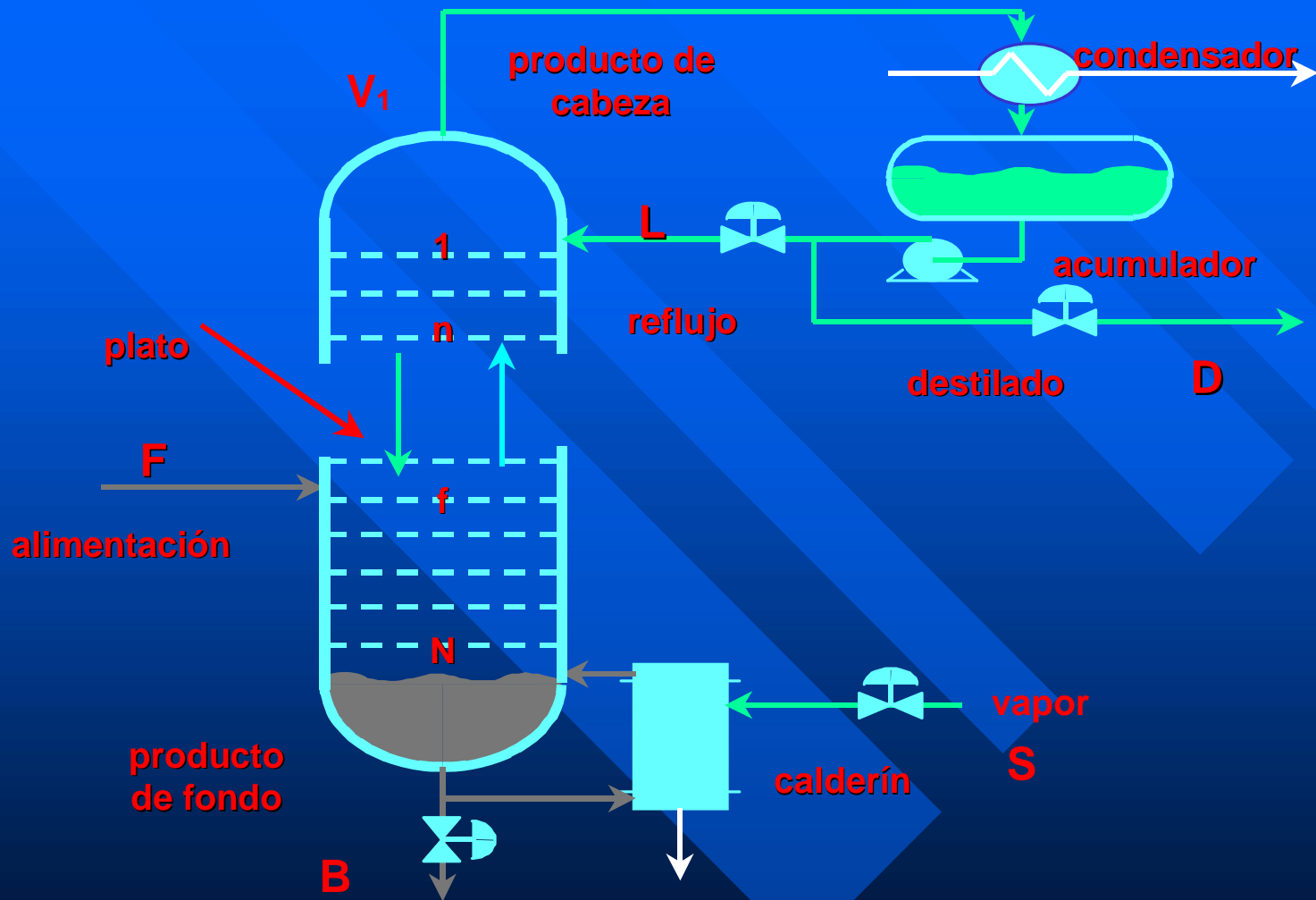
Proceso de intercambio de calor

PROCESOS MULTIVARIABLES



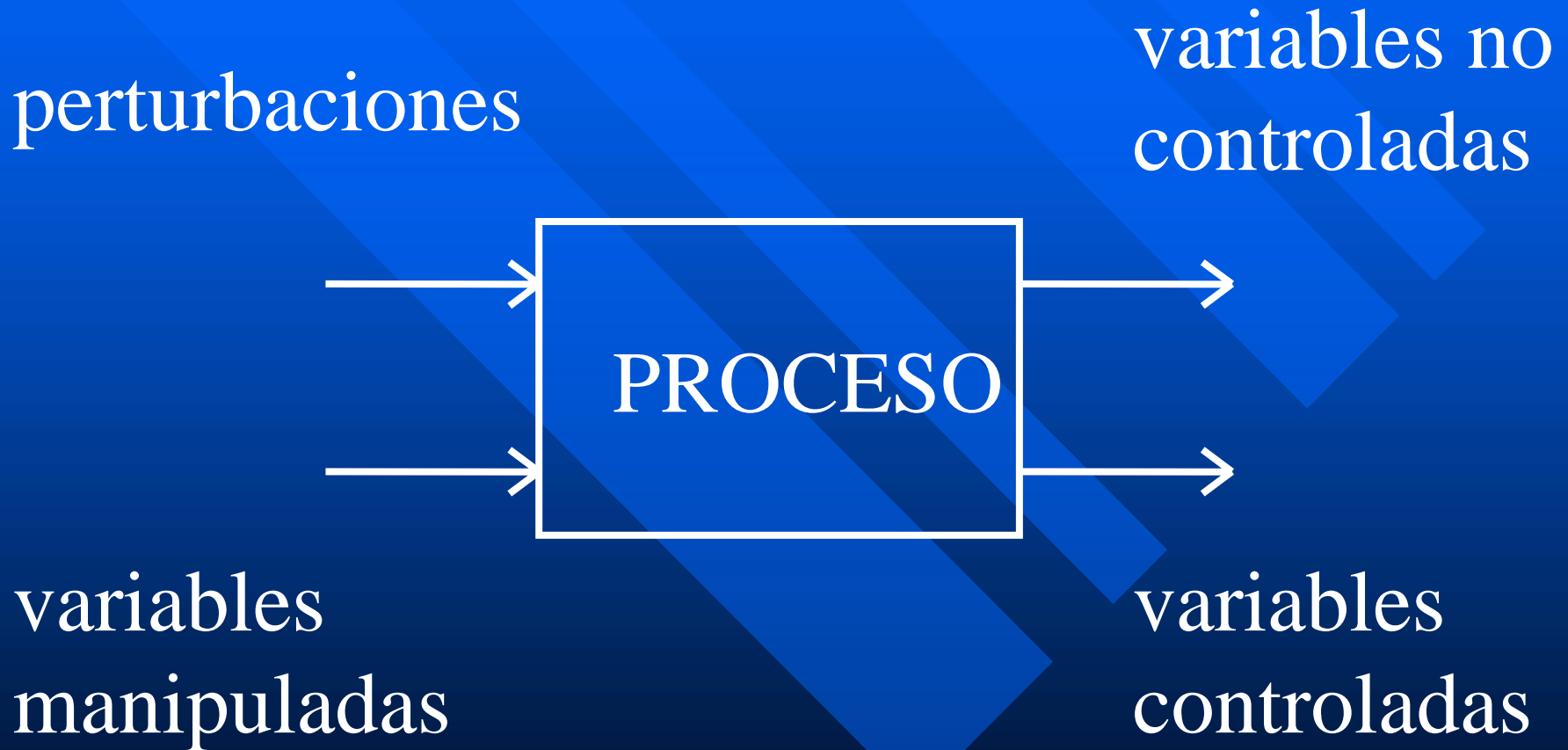
Estación de evaporación

PROCESOS MULTIVARIABLES

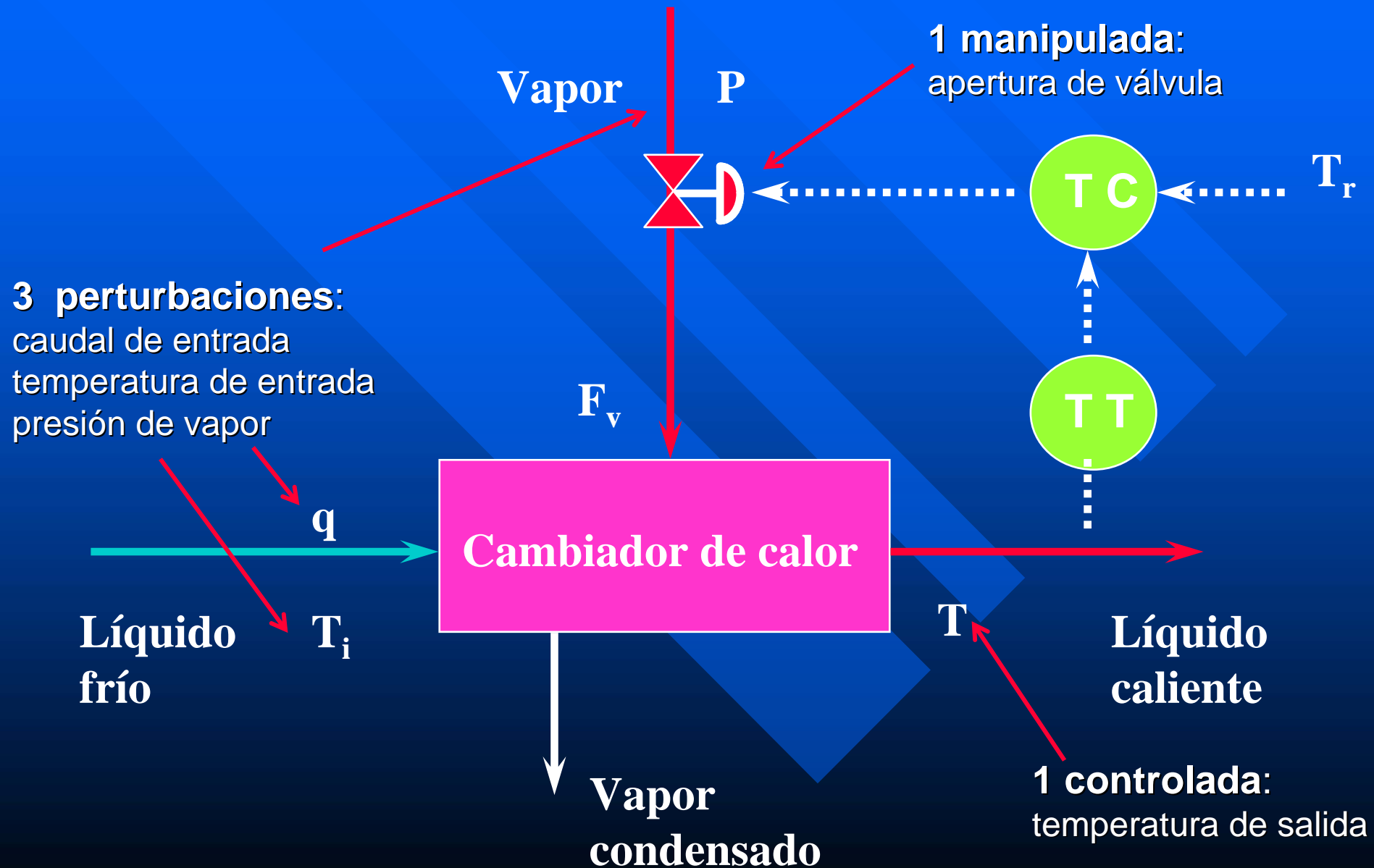


Columna rectificadora

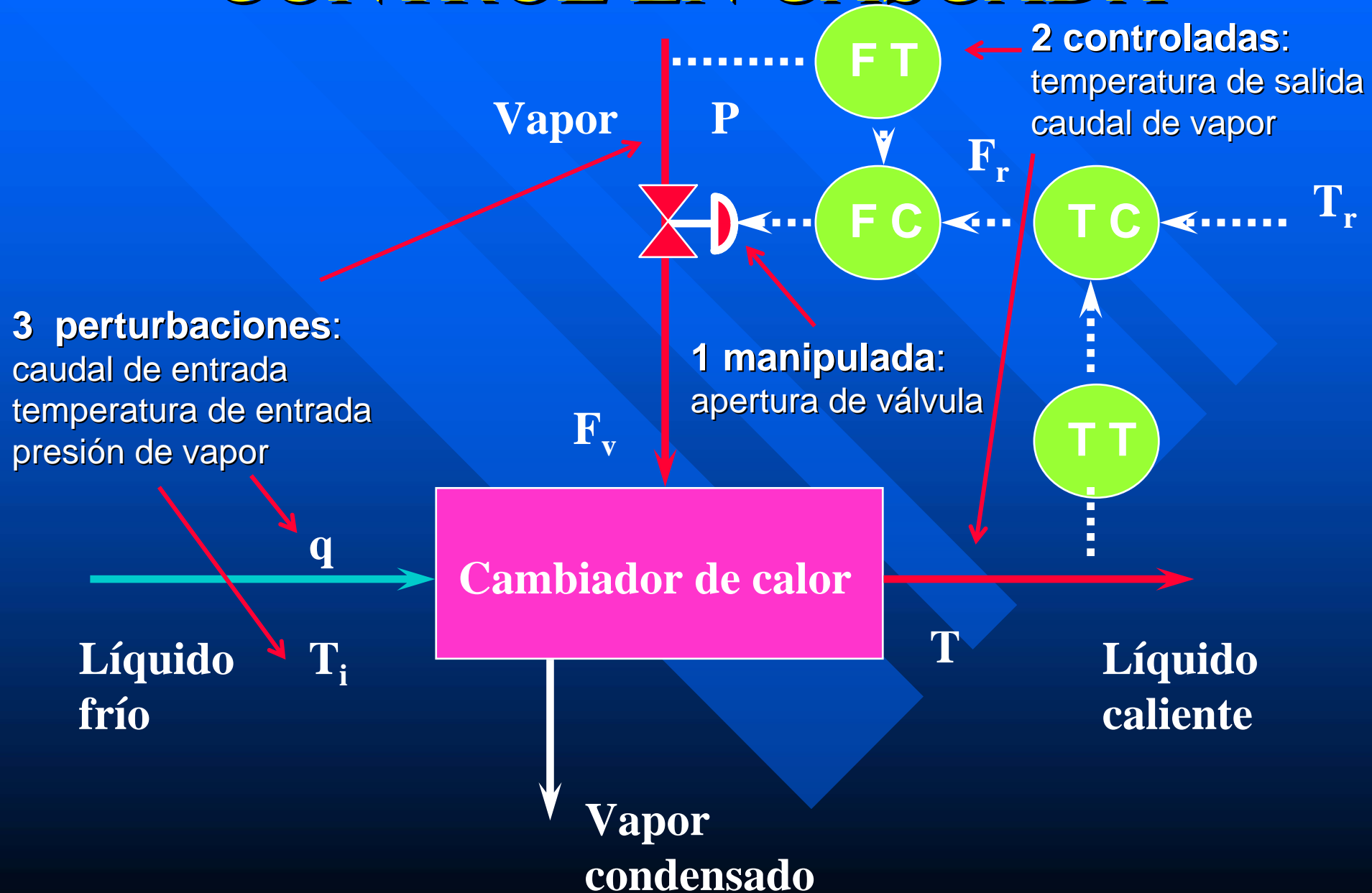
CLASIFICACIÓN DE VARIABLES



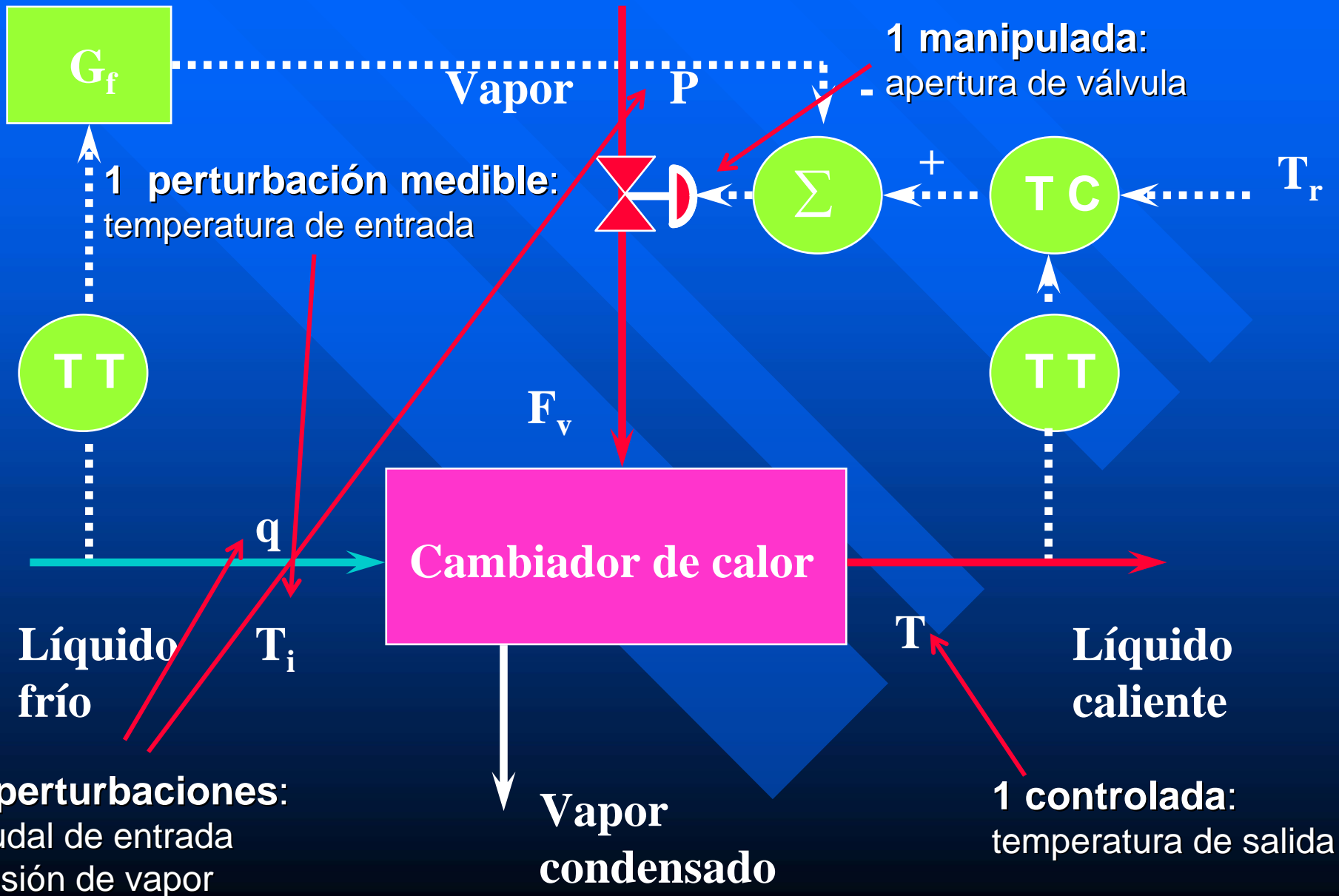
CONTROL CONVENCIONAL



CONTROL EN CASCADA



CONTROL FEEDFORWARD



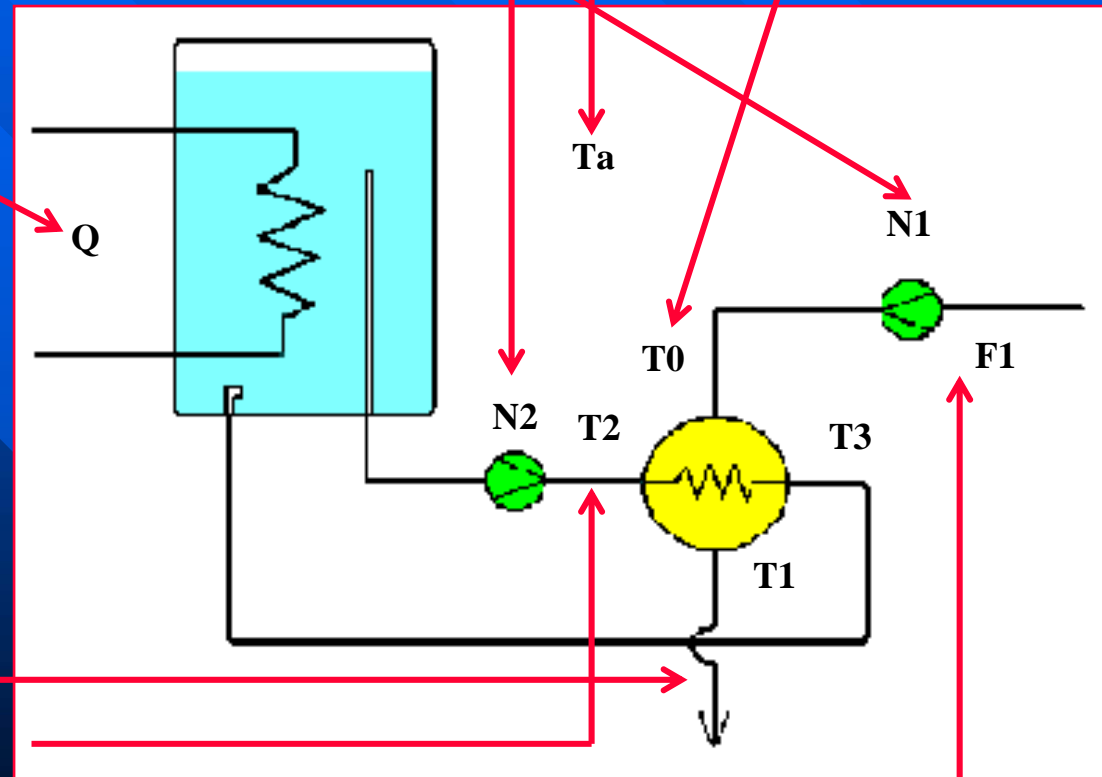
INTERCAMBIO DE CALOR

2 perturbaciones:

temperatura del líquido frío a la entrada (T_0)
temperatura ambiente (T_a)

3 manipuladas:

velocidades (N_1 y N_2) de las bombas
potencia (Q) calefactora

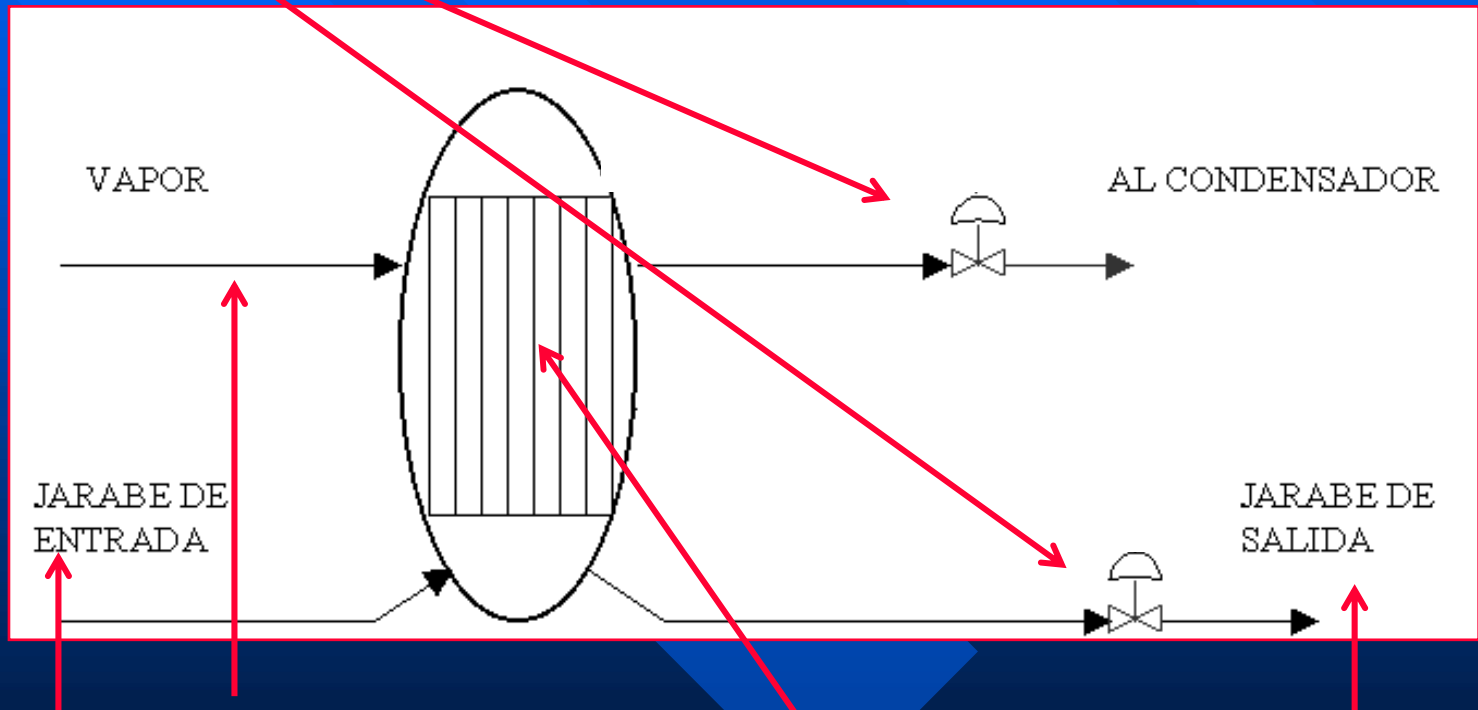


3 controladas:

temperatura líquido (T_1)
temperatura líquido calefactor (T_2)
caudal líquido frío (F_1)

Estación de evaporación

2 manipuladas:
caudal de vahos
caudal de jarabe



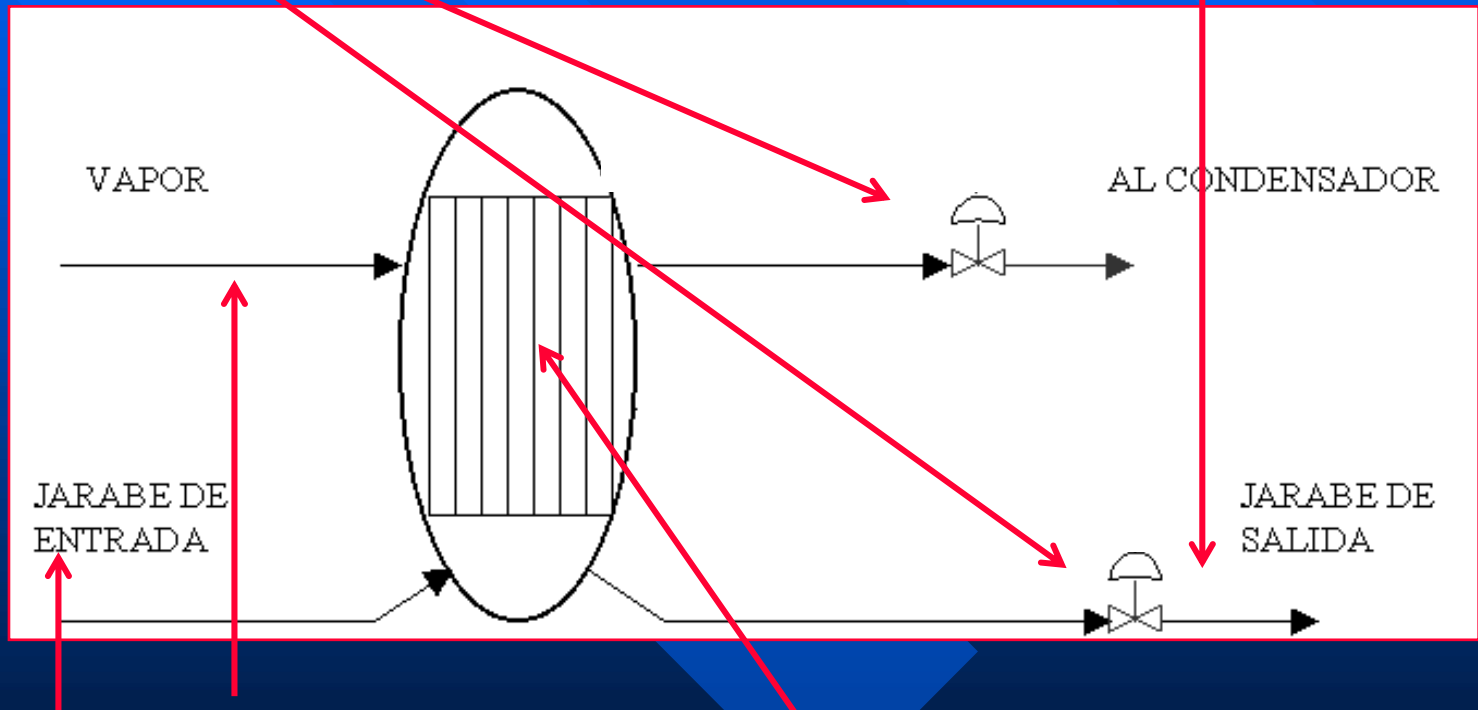
5 perturbaciones:
caudal, brix y temperatura de entrada
presión y caudal de vapor

5 controladas:
presión y nivel en el evaporador,
caudal, brix y temperatura de salida

Estación de evaporación

2 manipuladas:
caudal de vahos
caudal de jarabe

3 no controladas:
caudal, brix y temperatura de salida



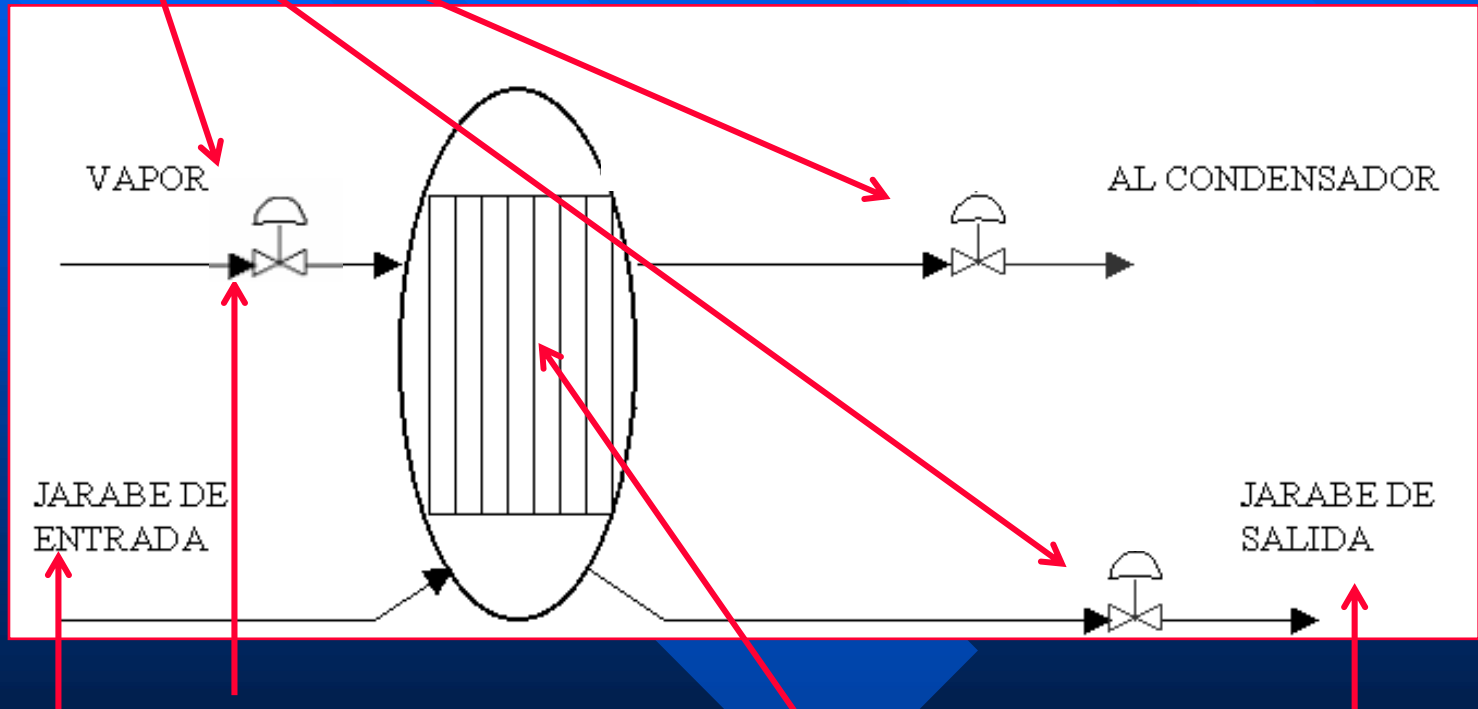
5 perturbaciones:
caudal, brix y temperatura de entrada
presión y caudal de vapor

2 controladas:
presión y nivel en el evaporador,

Estación de evaporación

3 manipuladas:

caudal de vapor
caudal de vahos
caudal de jarabe



4 perturbaciones:

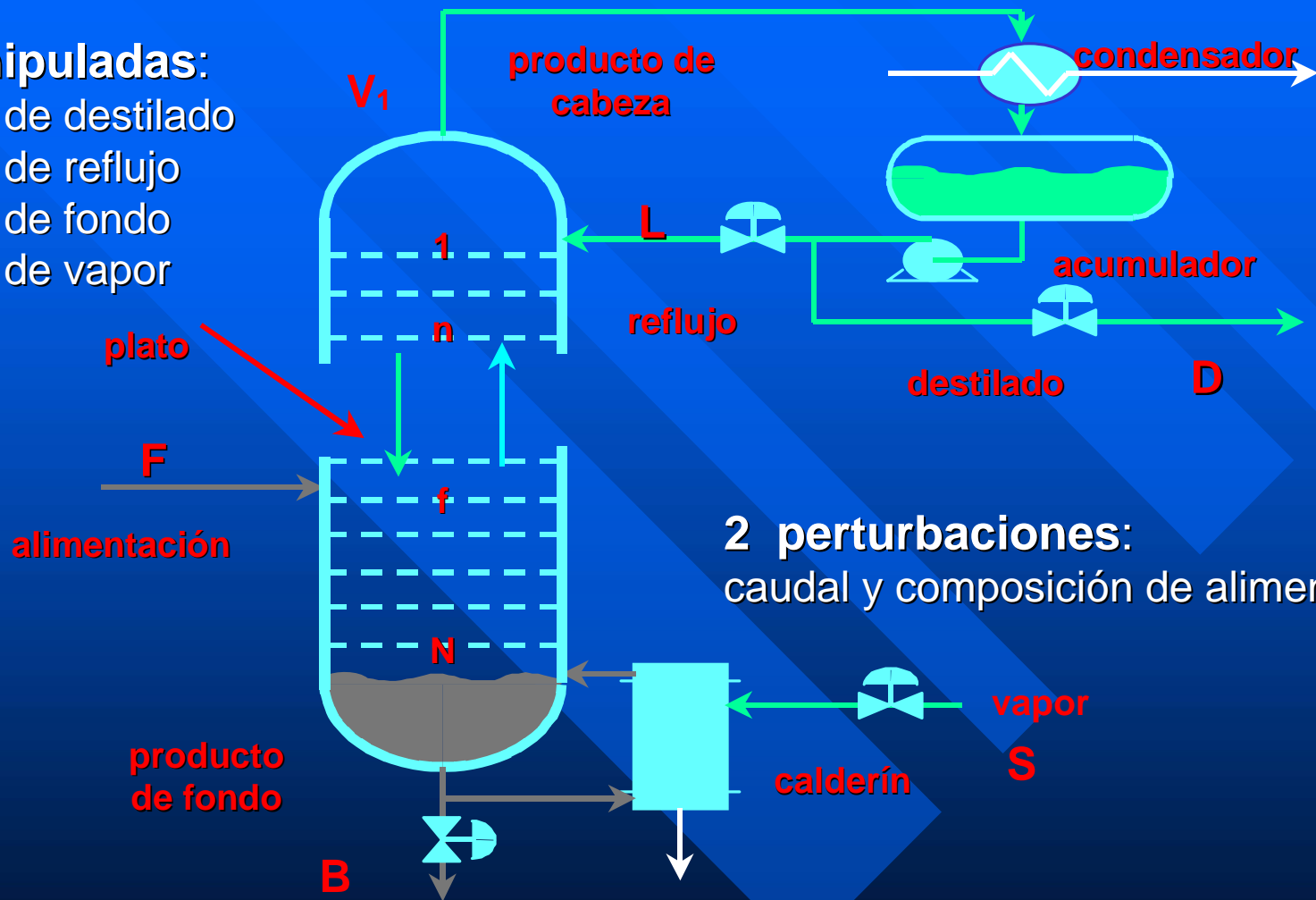
caudal, brix y temperatura de entrada
presión de vapor

5 controladas:

presión y nivel en el evaporador,
caudal, brix y temperatura de salida

Columna rectificadora

4 manipuladas:
caudal de destilado
caudal de reflujo
caudal de fondo
caudal de vapor



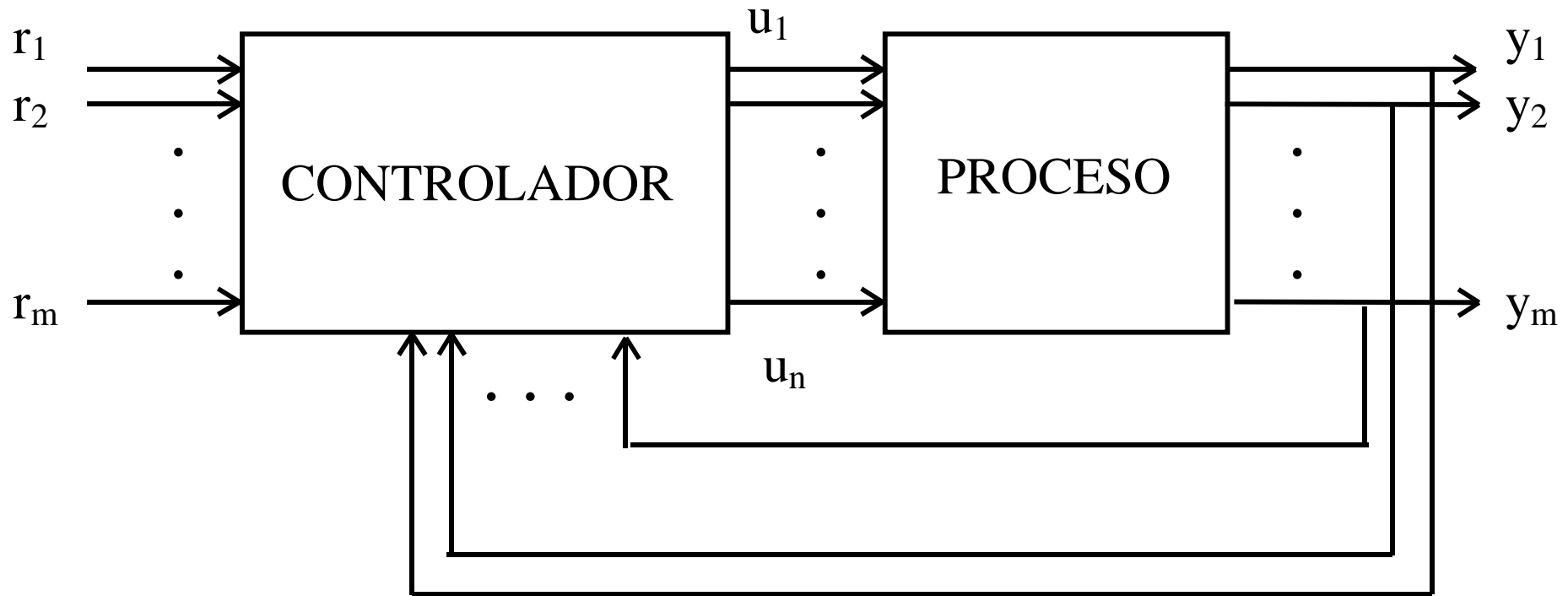
2 perturbaciones:
caudal y composición de alimentación

4 controladas:
nivel en el acumulador, nivel en el fondo
composición en cabeza y en fondo

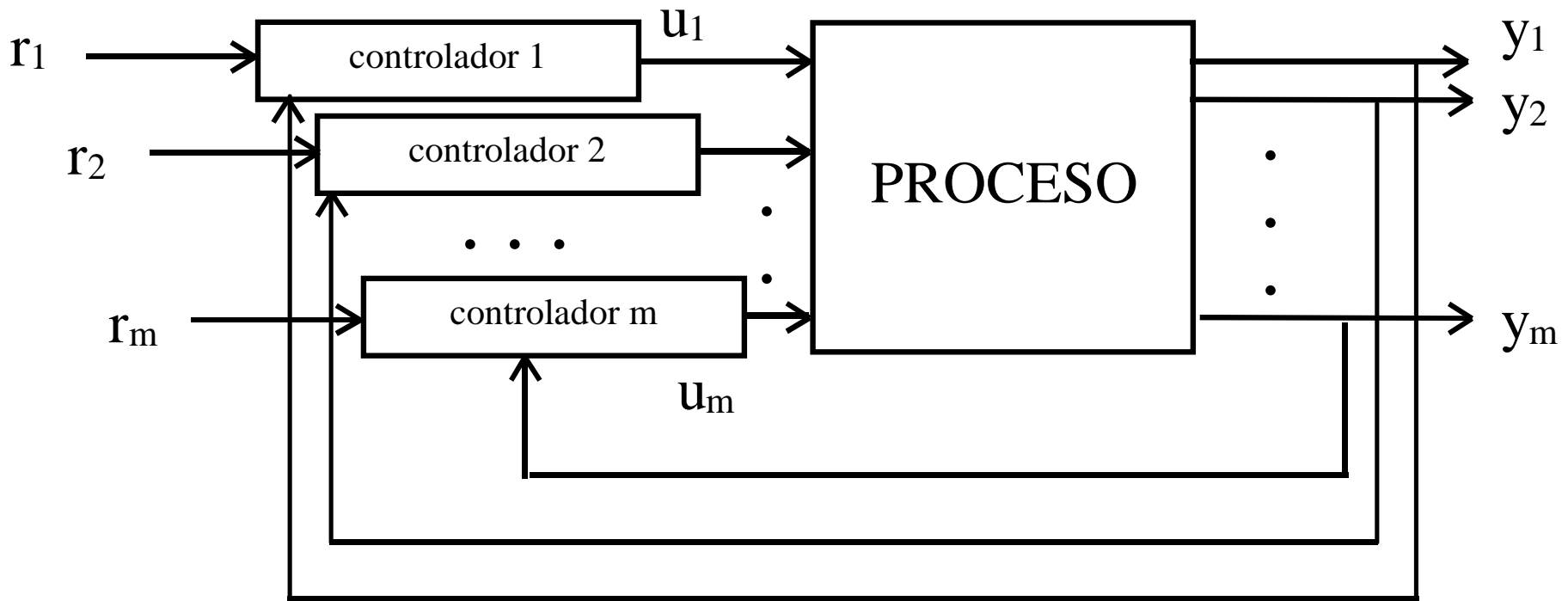
METODOLOGÍA

- Selección de las variables controladas
- Selección de las variables manipuladas
- Selección de la configuración de control
 - Control Centralizado
 - Control Descentralizado
- Selección del tipo de controlador

CONTROL CENTRALIZADO



CONTROL DESCENTRALIZADO



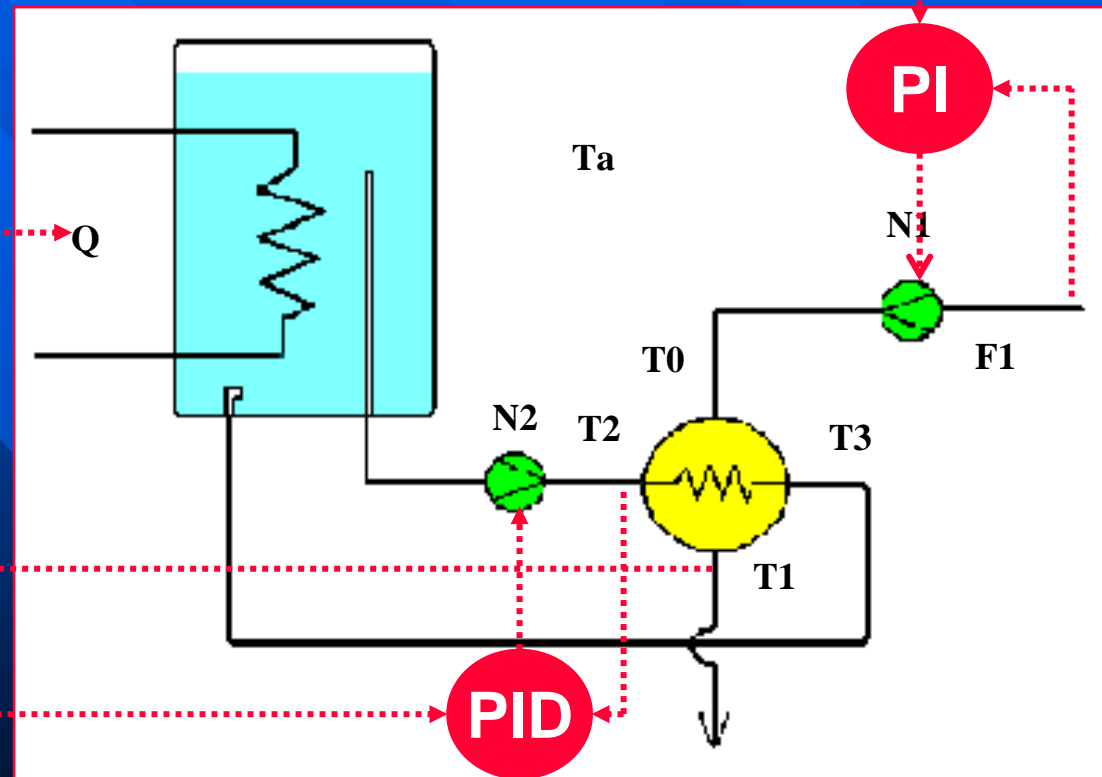
CONTROL DESCENTRALIZADO (3 lazos)

Lazo N1 - F1:

simple, más rápido,
interacciona poco con los otros dos

Lazo Q - T1:

más lento, fuerte interacción
con el lazo N2 - T2

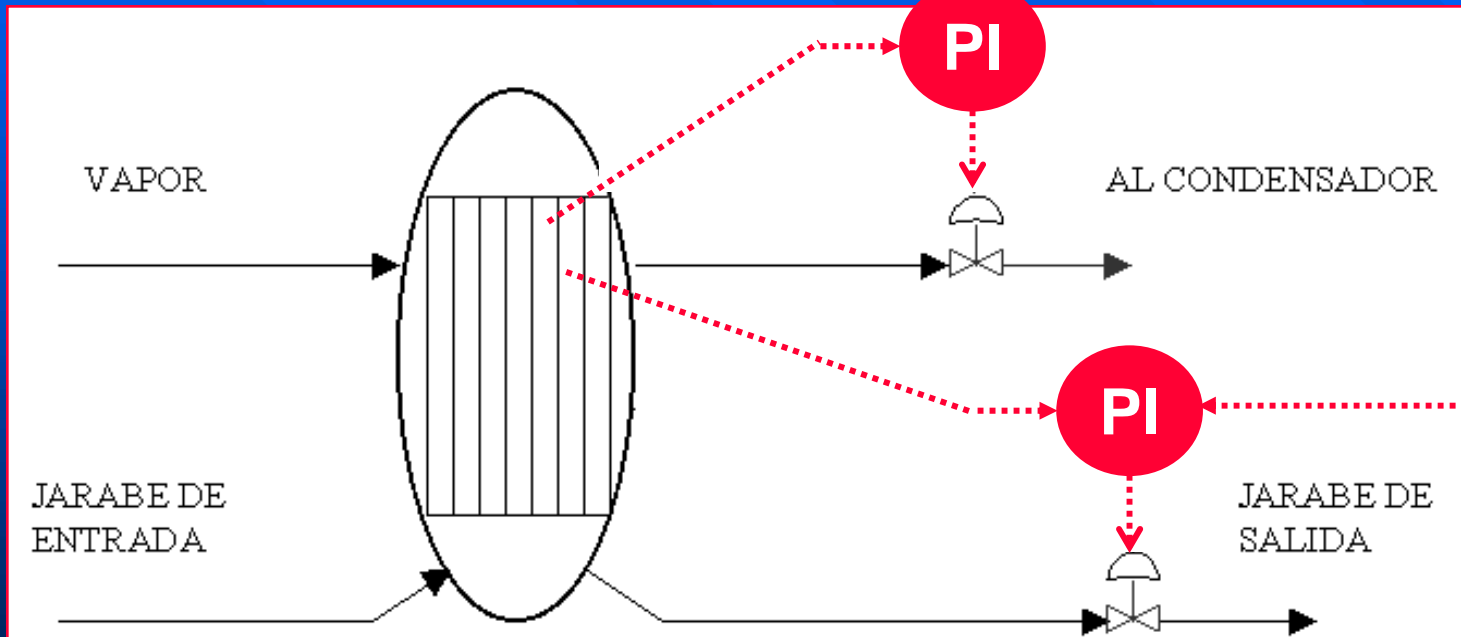


Lazo N2 - T2:

lento, fuerte interacción
con el lazo Q - T1

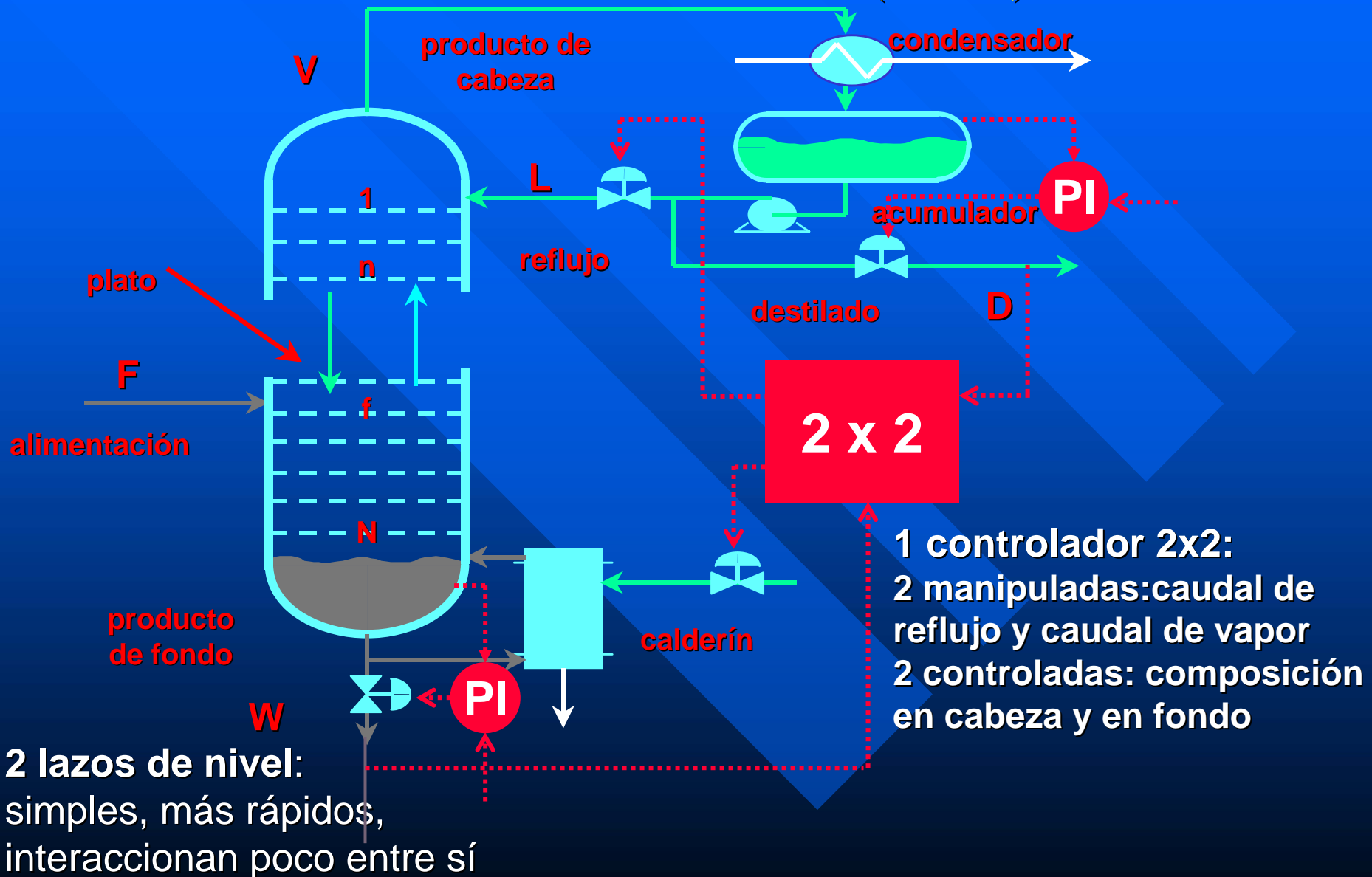
CONTROL DESCENTRALIZADO (2 lazos)

Lazo de presión
muy rápido, leve interacción



Lazo de nivel
rápido, leve interacción

DESCENTRALIZADO (2 lazos) + CENTRALIZADO (2 x 2)



APLICACIONES

- Procesos interactivos
- Procesos con dinámica compleja
- Procesos con puntos de operación cambiantes o sometidos al mercado
- Procesos con alto riesgo = altos beneficios

GRADOS DE LIBERTAD

Número de relaciones independientes que se pueden establecer entre las variables

Número de variables que describen el sistema

Grados de libertad

$$gl = v - r$$

Grados de libertad en un sistema de control

Nº MV's disponibles

Nº CV's a controlar en un valor fijo (SP)

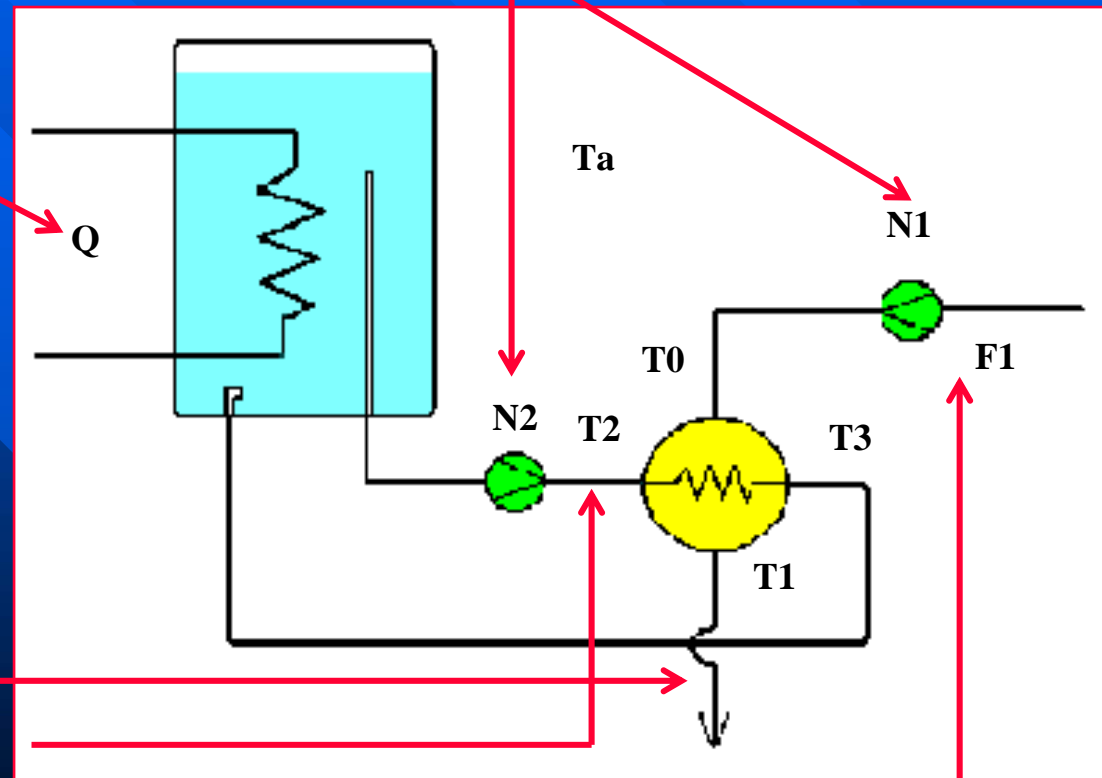
GRADOS DE LIBERTAD



Proceso cuadrado (3 x 3)

3 manipuladas:

velocidades (N1 y N2) de las bombas
potencia (Q) calefactora

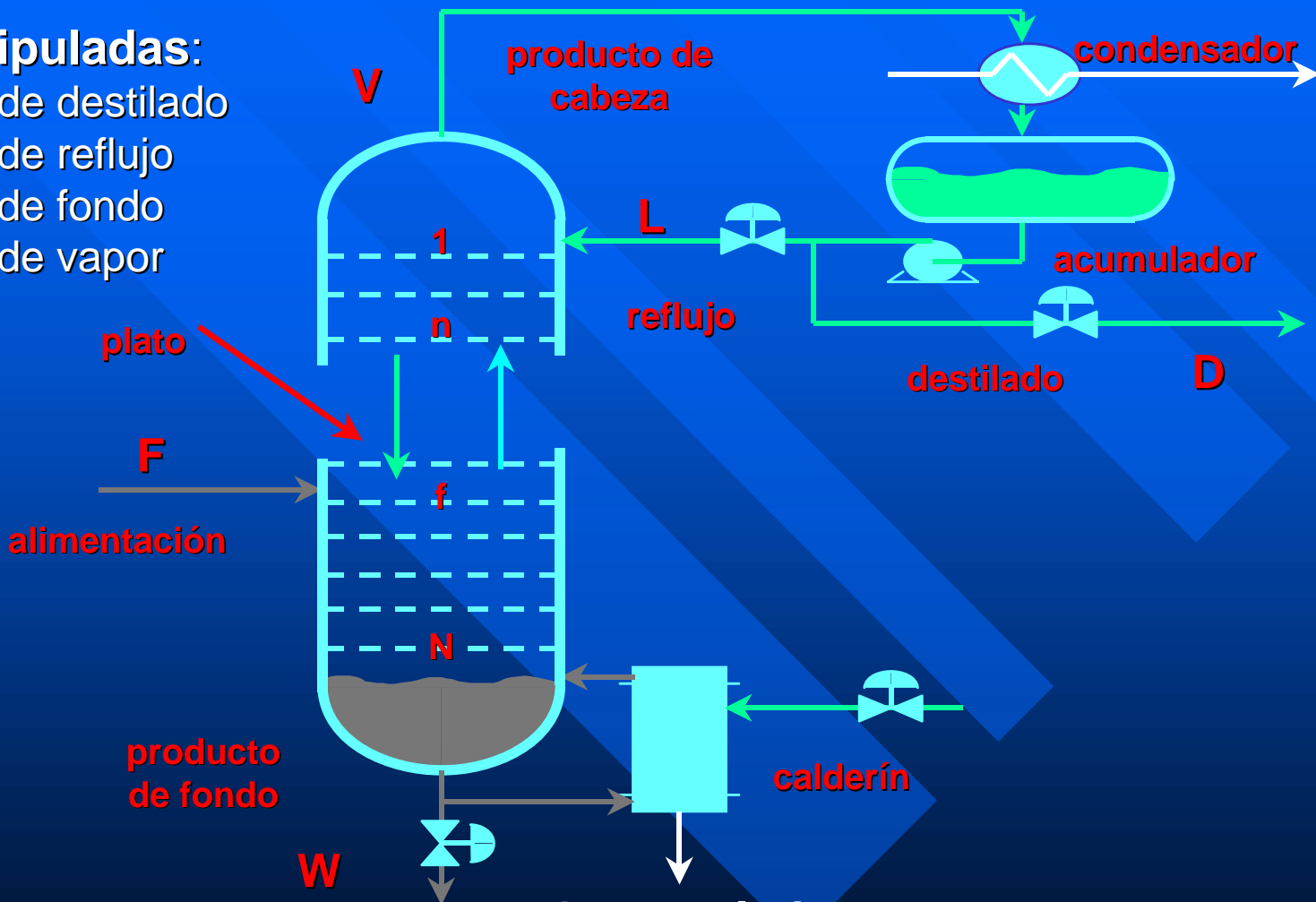


3 controladas:

temperatura líquido (T1)
temperatura líquido calefactor (T2)
caudal líquido frío (F1)

Proceso cuadrado (4 x 4)

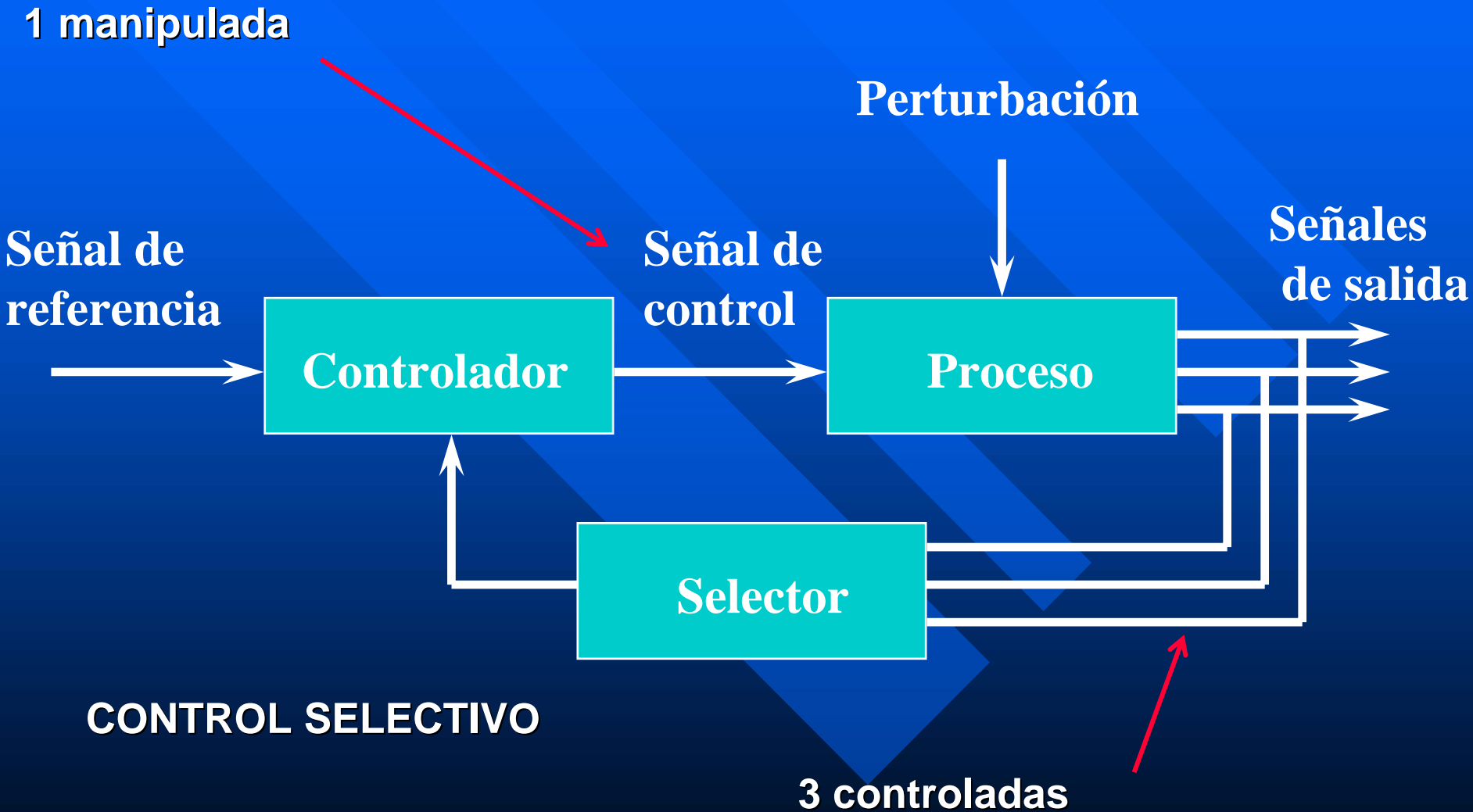
4 manipuladas:
caudal de destilado
caudal de reflujo
caudal de fondo
caudal de vapor



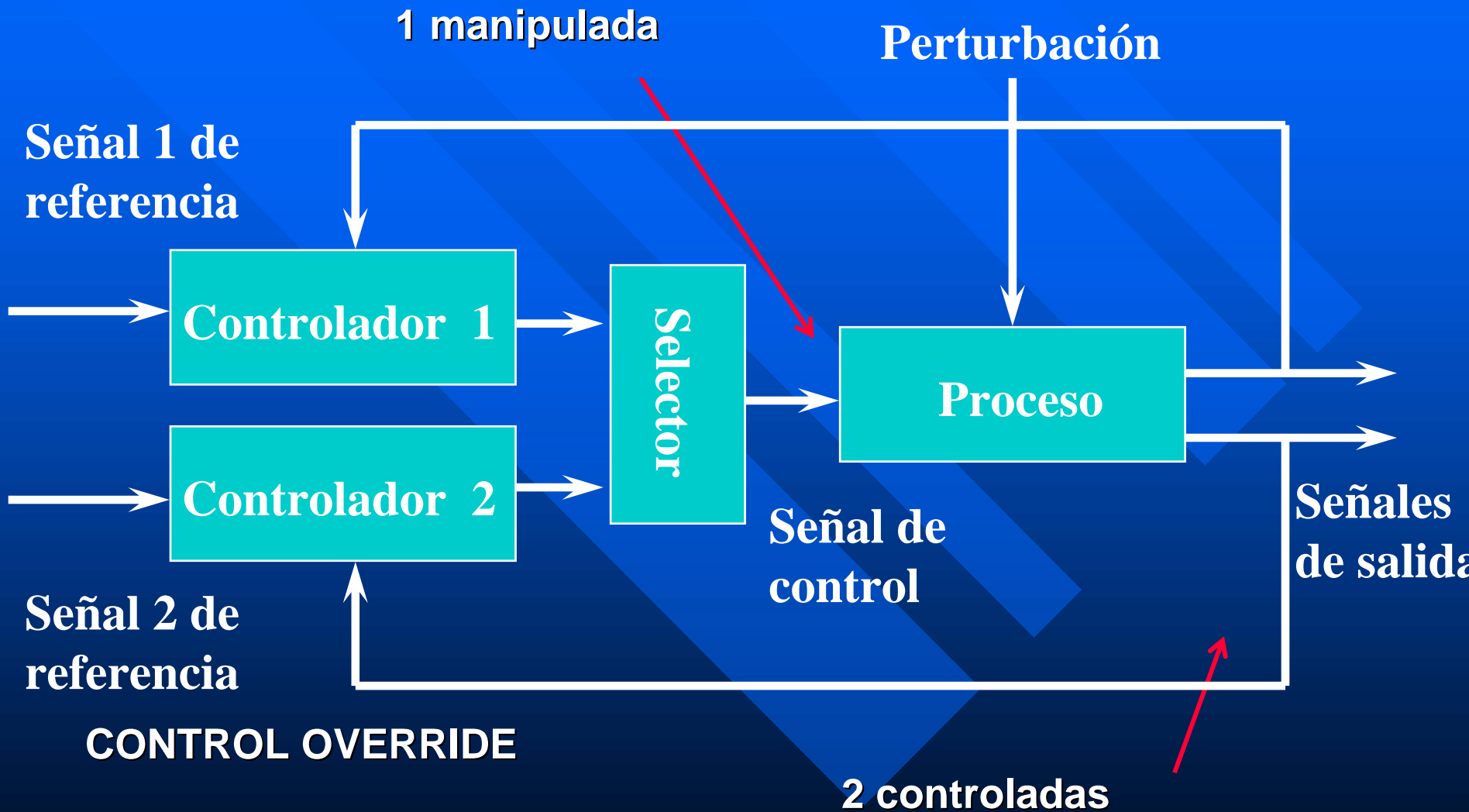
4 controladas:

nivel en el acumulador, nivel en el fondo
composición en cabeza y en fondo

Proceso estrecho (3 x 1)

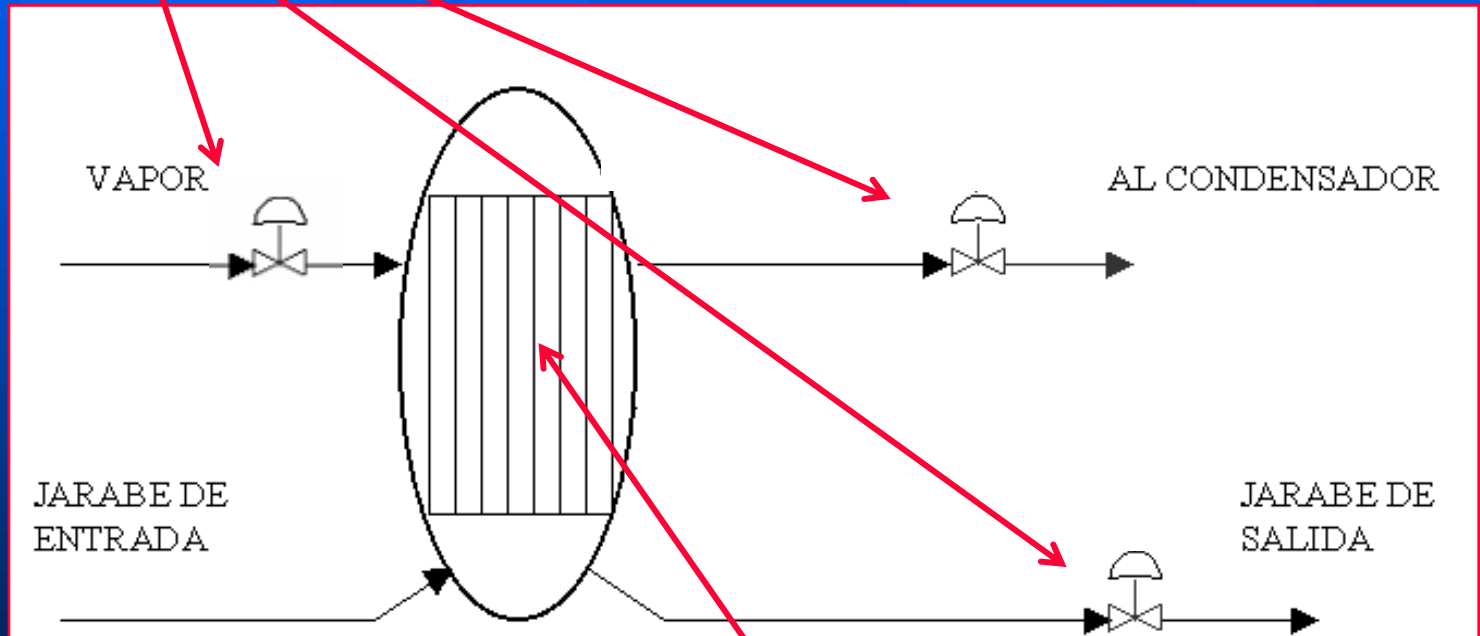


Proceso estrecho (2 x 1)



Proceso amplio (2 x 3)

3 manipuladas:
caudal de vapor
caudal de vahos
caudal de jarabe



2 controladas:
presión y nivel en el evaporador

CONTROL MULTIVARIABLE

Fernando Morilla García

Natividad Duro Carralero

Dpto. de Informática y Automática

fmorilla@dia.uned.es

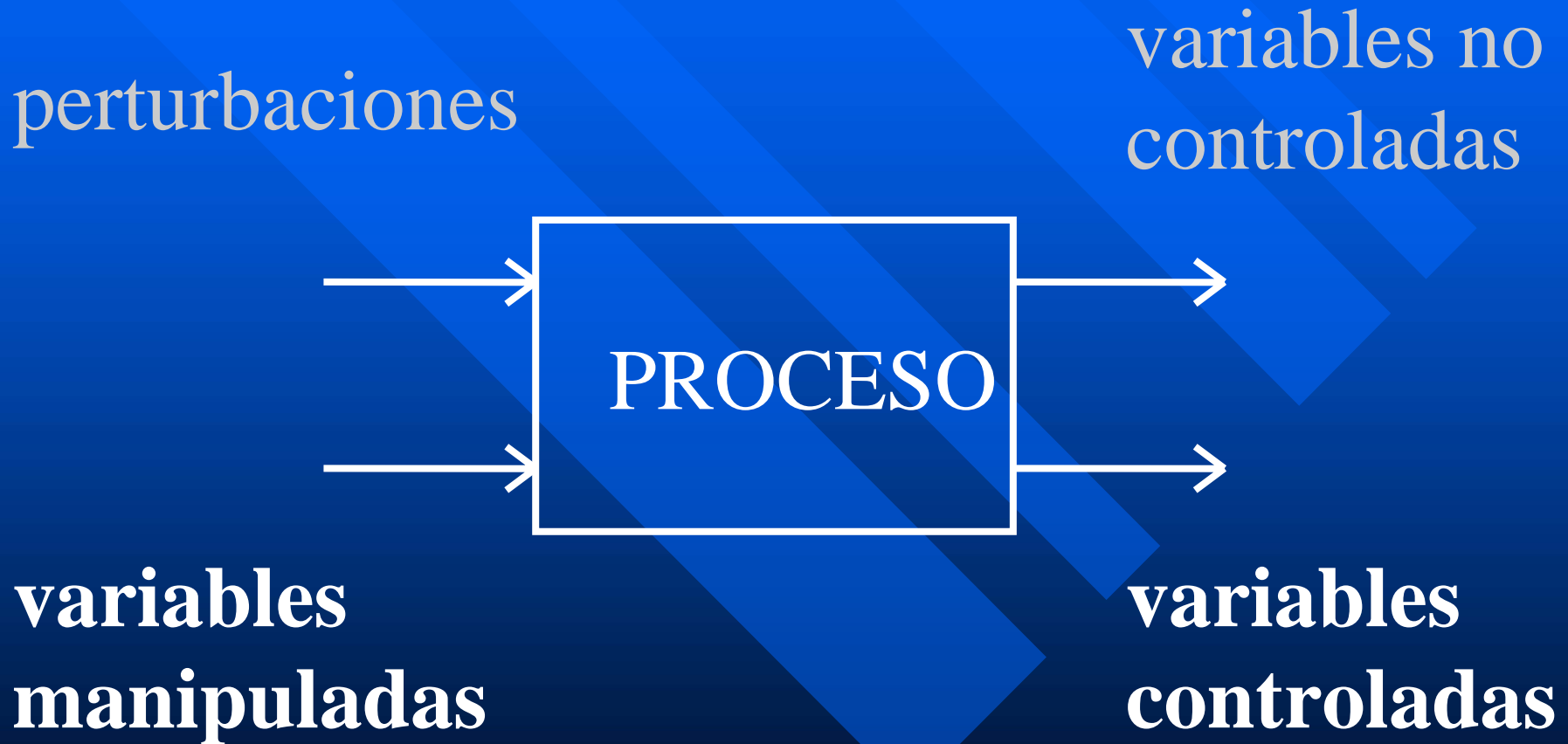
Contenido

- Tema 1: Introducción al control multivariable
- **Tema 2 : Medidas de interacción**
- Tema 3 : Control descentralizado
- Tema 4 : Control centralizado

Contenido

- **Tema 2 : Medidas de interacción**
 - Matriz de Ganancias Relativas RGA
 - Matriz de Ganancias Relativas Generalizada GRGA
 - Descomposición en Valores Singulares SVD
 - Número de Condición γ

CLASIFICACIÓN DE VARIABLES



METODOLOGÍA

- Selección de las variables controladas
- Selección de las variables manipuladas
- Selección de la configuración de control
 - Control Centralizado
 - Control Descentralizado
- Selección del tipo de controlador

Contenido

- **Tema 2 : Medidas de interacción**
 - **Matriz de Ganancias Relativas RGA**
 - Matriz de Ganancias Relativas Generalizada GRGA
 - Descomposición en Valores Singulares SVD
 - Número de Condición γ

Ganancia en estado estacionario (k_{ij})



En ausencia de perturbaciones

Con $n-1$ entradas fijas

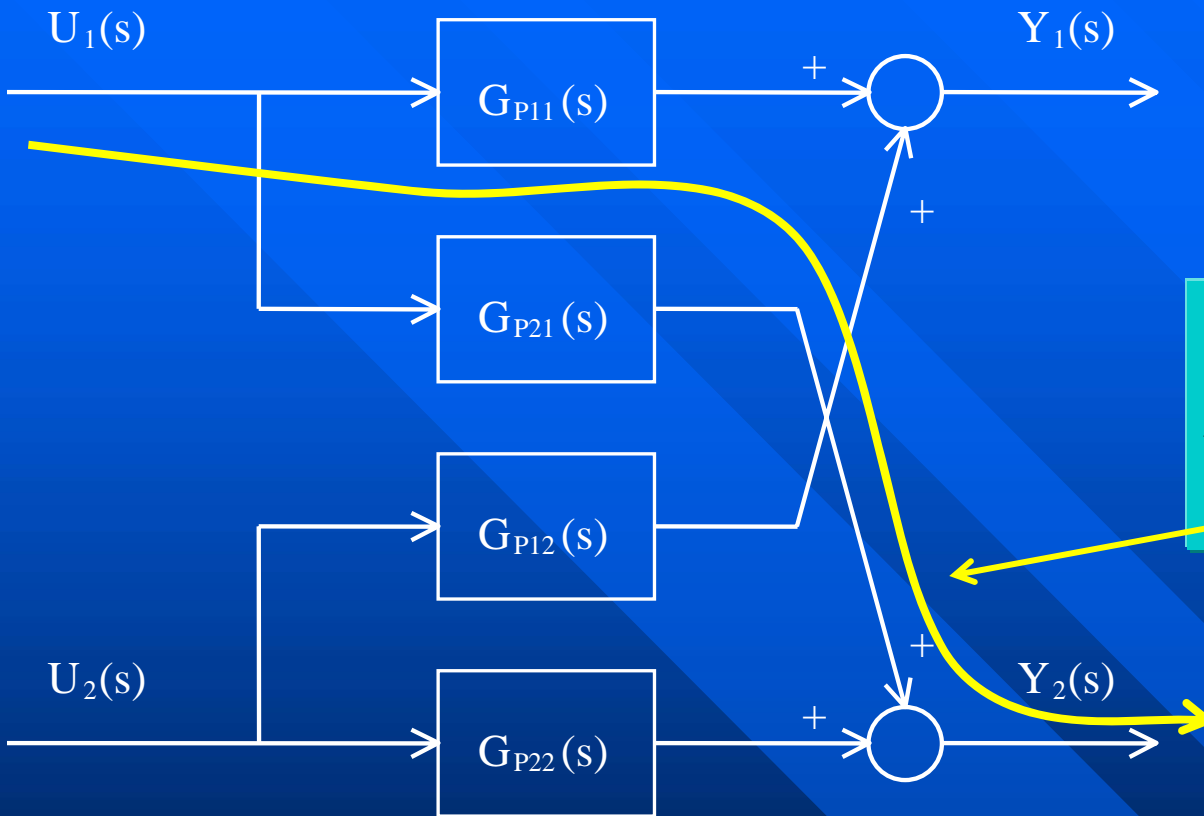
¿Qué cambio experimenta la salida y_i si la entrada u_j ha cambiado Δu_j ?

$$\Delta y_i = k_{ij} \Delta u_j$$

↑

Ganancias en lazo abierto del sistema en estado estacionario

Matriz de ganancias en estado estacionario (K)



SSGM

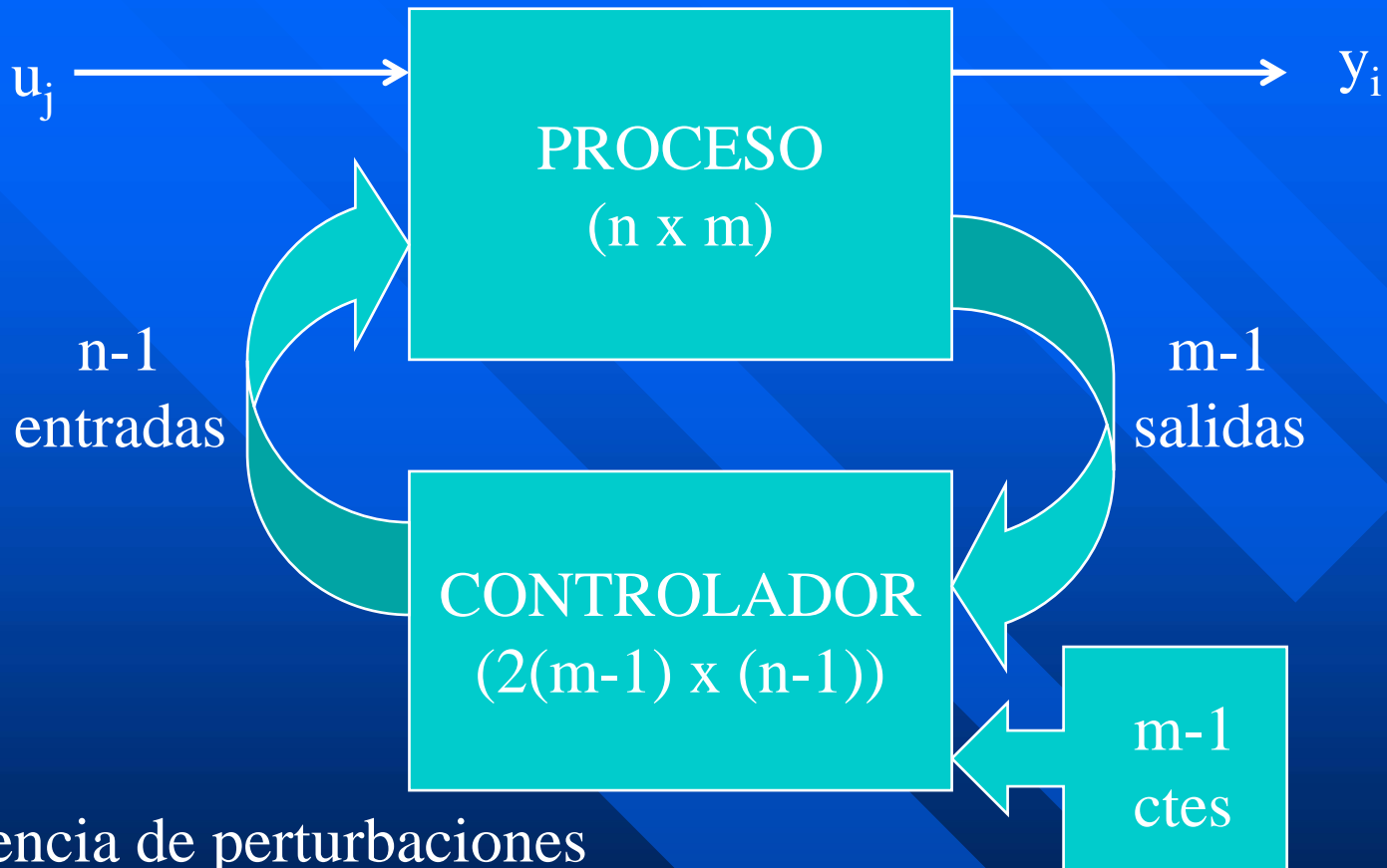
$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{u_k}; \forall k \neq j$$

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= G_{P11}(s)U_1(s) + G_{P12}(s)U_2(s) \\ Y_2(s) &= G_{P21}(s)U_1(s) + G_{P22}(s)U_2(s) \end{aligned}$$

$$k_{ij} = \lim_{s \rightarrow 0} G_{Pij}(s)$$

Ganancia en estado estacionario (k'_{ij})



En ausencia de perturbaciones

Con $m-1$ salidas perfectamente controladas

¿Qué cambio experimenta la salida y_i si la entrada u_j ha cambiado Δu_j ?

$$\Delta y_i = k'_{ij} \Delta u_j$$

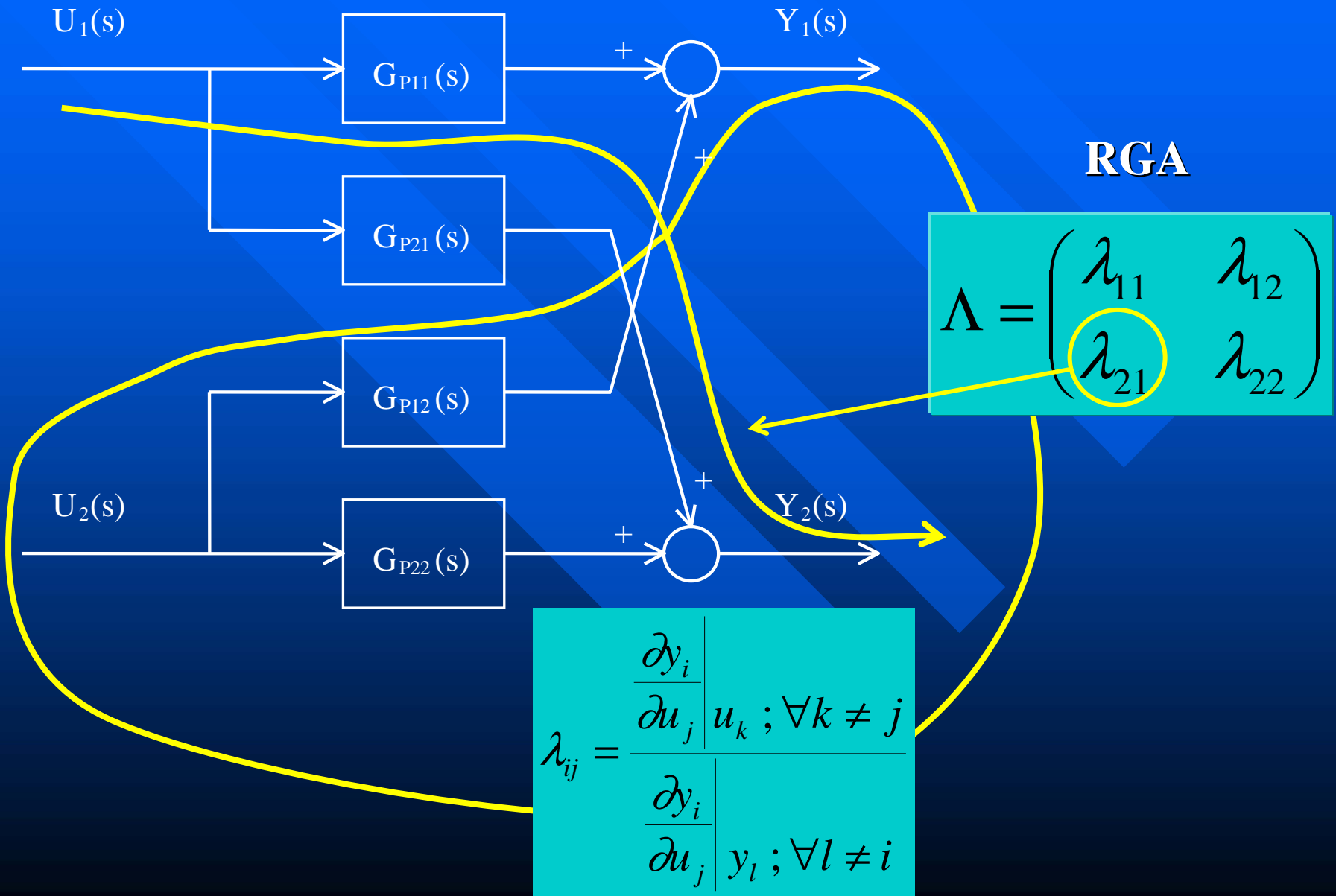
Ganancia relativa (λ_{ij})

ganancia con todos los lazos abiertos

ganancia con las demás salidas bajo control perfecto

$$\lambda_{ij} = \frac{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{u_k; \forall k \neq j}}{\left. \frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right|_{y_l; \forall l \neq i}} = \frac{k_{ij}}{k'_{ij}}$$

Matriz de ganancias relativas (Λ)



Matriz de ganancias relativas (2x2)

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}$$



$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k_{11}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} & \frac{-k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \\ \frac{-k_{12}k_{21}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} & \frac{k_{11}k_{22}}{k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21}} \end{pmatrix}$$

Matriz de ganancias relativas (nxn)

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{nn} \end{pmatrix}$$



$$\Lambda = K \times (K^{-1})^T$$

En matlab: rga = k .* (inv(k))'

Propiedades de la RGA (n x n)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_{ji} = 1$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{ji} = 1$$

Ejemplos de RGA

$$\Lambda_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 1 - \lambda_{11} \\ 1 - \lambda_{11} & \lambda_{11} \end{pmatrix} = f(\lambda_{11})$$

$$\Lambda_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 1 - \lambda_{11} - \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 1 - \lambda_{21} - \lambda_{22} \\ 1 - \lambda_{11} - \lambda_{21} & 1 - \lambda_{12} - \lambda_{22} & 1 + \lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{21} + \lambda_{22} \end{pmatrix} \\ = g(\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22})$$

Proceso nxn se calculan $(n-1)^2$

RGA = matriz identidad

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \cdot & k_{1n} \\ 0 & k_{22} & k_{23} & \cdot & k_{2n} \\ 0 & 0 & k_{33} & \cdot & k_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & k_{nn} \end{pmatrix}$$



$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & \cdot & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \cdot & k_{nn} \end{pmatrix}$$



Análisis de las interacciones $k'_{ij} = k_{ij} / \lambda_{ij}$

λ_{ij} es una medida del grado de interacción que los demás lazos de control tienen sobre el posible lazo $u_j - y_i$

- $\lambda_{ij}=1 \Rightarrow$ ausencia de interacción entre el lazo analizado y los demás. ($k_{ij}=k'_{ij}$)
- $\lambda_{ij}=0 \Rightarrow$
 - La entrada u_j no afecta directamente a la salida y_i ($k_{ij}=0$)
 - La entrada u_j afecta mucho a la salida y_i cuando los demás lazos están cerrados ($k'_{ij} \gg \gg \gg$)
- $\lambda_{ij}=\infty \Rightarrow$ La entrada u_j no afecta a la salida y_i cuando los demás lazos están cerrados ($k'_{ij}=0$)
- $\lambda_{ij}<0 \Rightarrow$ se produce un cambio de signo en la ganancia cuando los demás lazos se cierran (caso peor)

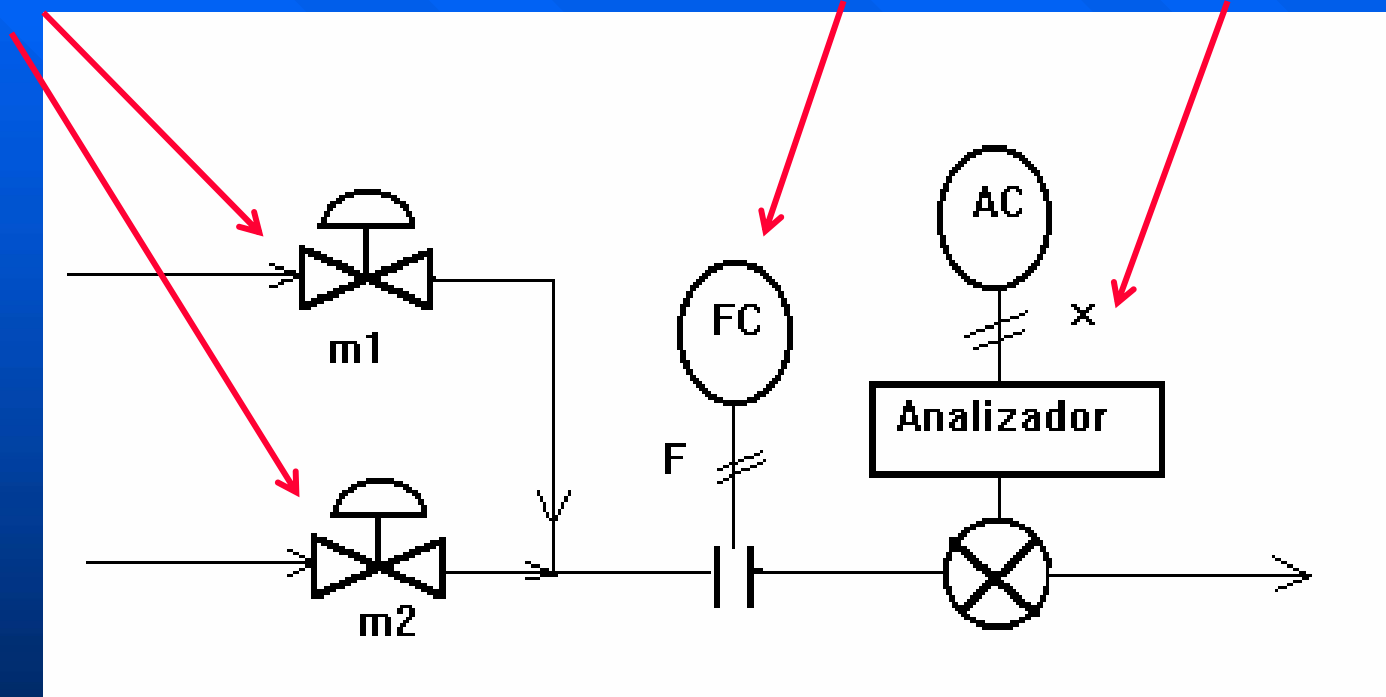
Reglas de emparejamiento

- Emparejar con cada salida aquella entrada que presente ganancia relativa más cercana a la unidad
- Evitar emparejamientos que lleven asociado una ganancia relativa negativa
- Comprobar que los emparejamientos elegidos no provocan inestabilidad

PROCESO DE MEZCLA

2 manipuladas:
caudales m_1 y m_2

2 controladas:
caudal total (F) y la concentración (x)



¿Con qué variable manipulada se debe controlar el caudal total?
¿y la concentración?

RGA del proceso de mezcla

**Modelo
en estado estacionario**

$$F = m_1 + m_2 \quad ; \quad x = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial m_1} \right|_{m_2} = \left. \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial m_1} \right|_{m_2} = 1$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial m_1} \right|_x = \left. \frac{\partial(m_1 + m_2)}{\partial m_1} \right|_x = \left. \frac{\partial\left(\frac{m_1}{x}\right)}{\partial m_1} \right|_x = \frac{1}{x}$$

$$\lambda_{11} = \frac{\left. \frac{\partial F}{\partial m_1} \right|_{m_2}}{\left. \frac{\partial F}{\partial m_1} \right|_x} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 1 - \lambda_{11} \\ 1 - \lambda_{11} & \lambda_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 - x \\ 1 - x & x \end{pmatrix}$$

RGA del proceso de mezcla

$$F = m_1 + m_2 \quad ; \quad x = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$K = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial F}{\partial m_1} \right|_{m_2} & \left. \frac{\partial F}{\partial m_2} \right|_{m_1} \\ \left. \frac{\partial x}{\partial m_1} \right|_{m_2} & \left. \frac{\partial x}{\partial m_2} \right|_{m_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{m_2}{(m_1 + m_2)^2} & \frac{-m_1}{(m_1 + m_2)^2} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = K \cdot x \cdot (K^{-1})^T = \begin{pmatrix} \frac{m_1}{m_1 + m_2} & \frac{m_2}{m_1 + m_2} \\ \frac{m_2}{m_1 + m_2} & \frac{m_1}{m_1 + m_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 1 - x \\ 1 - x & x \end{pmatrix}$$

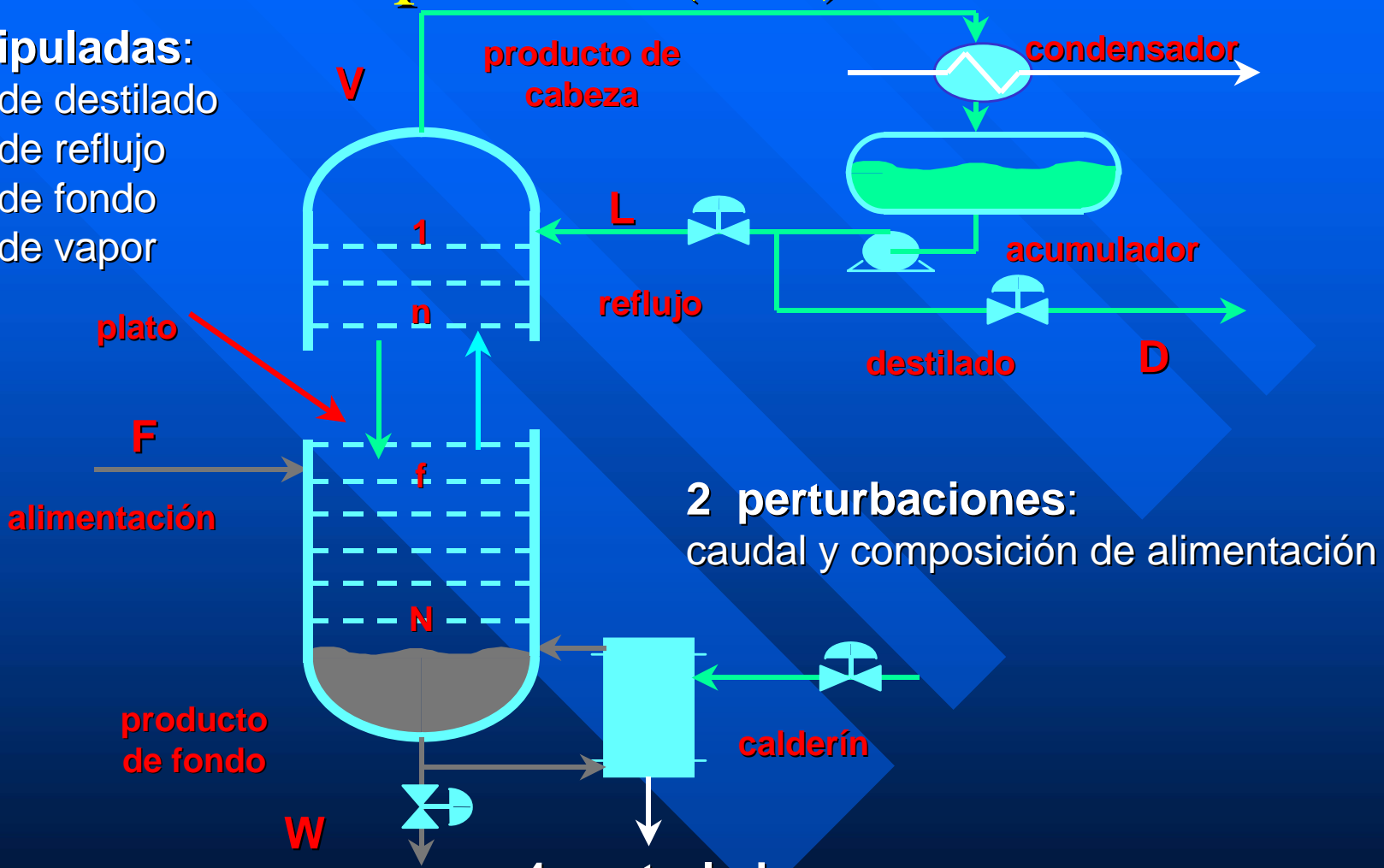
Interacciones y emparejamiento en el proceso de mezcla

$$\Lambda = \begin{matrix} & m_1 & m_2 \\ F \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \\ x \begin{pmatrix} 1-x & x \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- El grado de interacción y por tanto el emparejamiento dependerá del valor de consigna para la concentración x .
 - Si $x > 0.5$ se debe utilizar m_1 para controlar el caudal total y m_2 para controlar la concentración
 - Pero si $x < 0.5$ se debe utilizar m_2 para controlar el caudal total y m_1 para controlar la concentración
- En definitiva, siempre se debe utilizar el mayor de los caudales para controlar el caudal total y el menor para controlar la concentración

Columna rectificadora: vista como proceso (4x4)

4 manipuladas:
caudal de destilado
caudal de reflujo
caudal de fondo
caudal de vapor

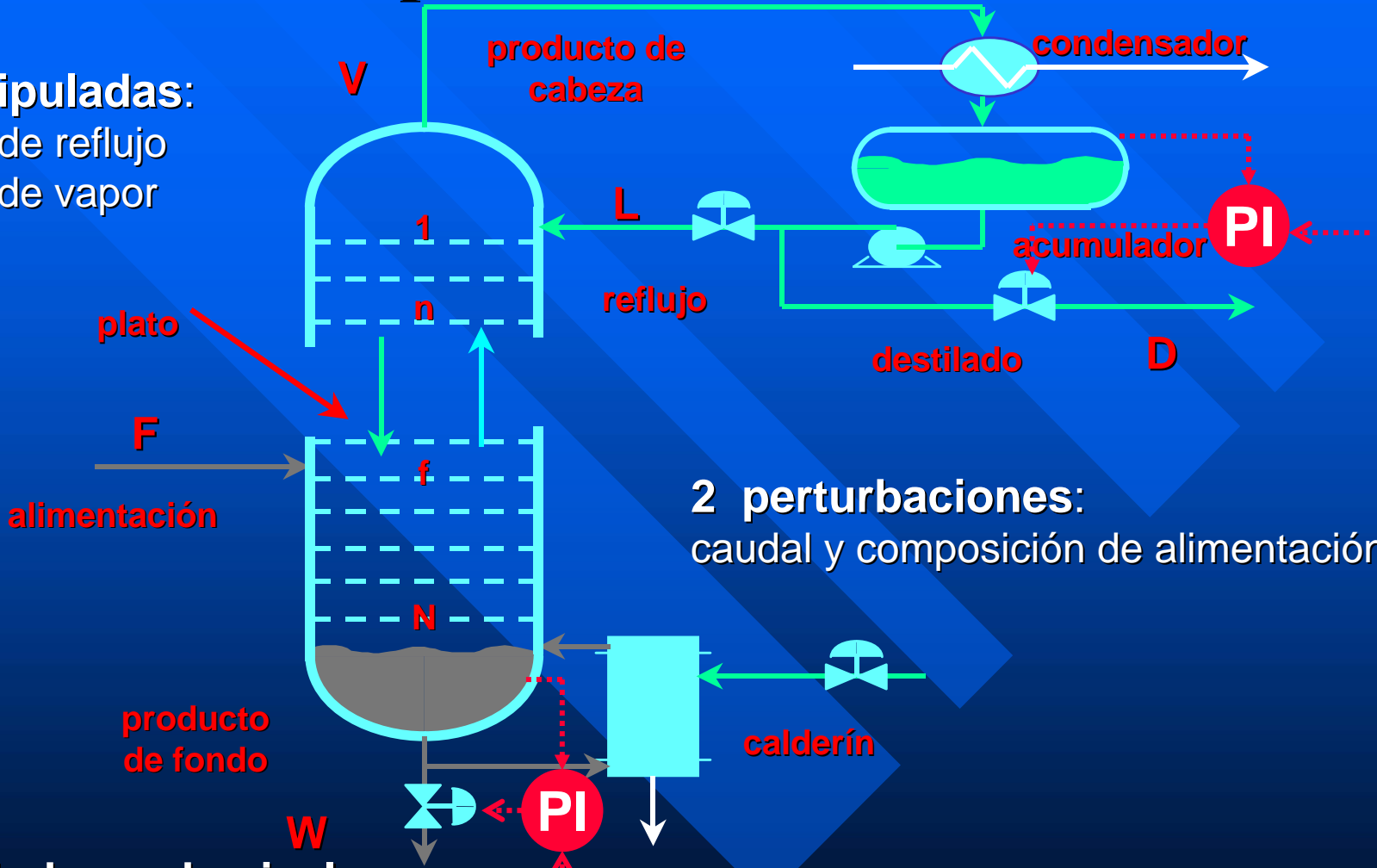


2 perturbaciones:
caudal y composición de alimentación

4 controladas:
nivel en el acumulador, nivel en el fondo
composición en cabeza y en fondo

Columna rectificadora: vista como proceso (2x2)

2 manipuladas:
caudal de reflujo
caudal de vapor



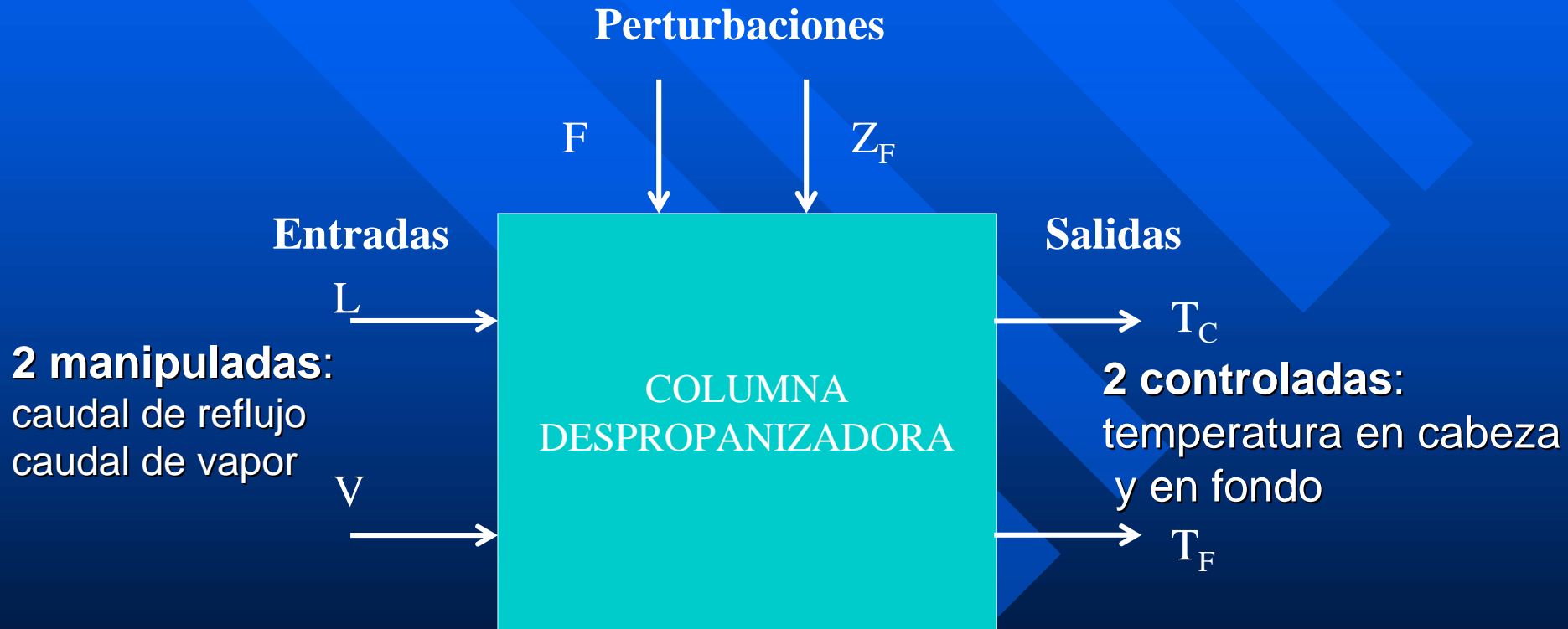
2 perturbaciones:
caudal y composición de alimentación

2 controladores de nivel:
simples, más rápidos,
interaccionan poco con los otros dos

2 controladas:
composición en cabeza y en fondo

Ejemplo de columna rectificadora

2 perturbaciones:
caudal y composición de alimentación



RGA de la columna rectificadora

**Modelo
dinámico**

$$T_C(s) = -\frac{2.6}{(23.7s+1)(11.8s+1)}L(s) + \frac{0.01}{(17.9s+1)^2}V(s) - \frac{0.18}{(21.3s+1)^2}F(s) - \frac{0.96}{(21.3s+1)^2}Z_F(s)$$

$$T_F(s) = -\frac{0.57}{(19.7s+1)(9.3s+1)}L(s) + \frac{0.02}{(24.3s+1)(8.1s+1)}V(s) - \frac{0.85}{(20.2s+1)(4.4s+1)}F(s) - \frac{0.5}{(20.2s+1)(4.4s+1)}Z_F(s)$$

Hay poca interacción y los emparejamientos recomendados están en la diagonal: T_C - L ; T_F - V

$$K = \begin{pmatrix} -2.6 & 0.01 \\ -0.57 & 0.02 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{k_{CL}k_{FV}}{k_{CL}k_{FV} - k_{FL}k_{CV}} & \frac{-k_{FL}k_{CV}}{k_{CL}k_{FV} - k_{FL}k_{CV}} \\ \frac{-k_{FL}k_{CV}}{k_{CL}k_{FV} - k_{FL}k_{CV}} & \frac{k_{CL}k_{FV}}{k_{CL}k_{FV} - k_{FL}k_{CV}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1231 & -0.1231 \\ -0.1231 & 1.1231 \end{pmatrix}$$

Ejemplos de RGA (3x3)

■ Interacción débil (ej. 2.4)

$$FTLA = \frac{1}{s^2+s+1} \begin{pmatrix} s+20 & s+4 & s+1 \\ s+5 & s+10 & s+2 \\ s+6 & s+3 & s+15 \end{pmatrix}$$



$$RGA = \begin{pmatrix} 1.11 & -0.09 & -0.017 \\ -0.11 & 1.14 & -0.028 \\ -0.0046 & -0.041 & 1.045 \end{pmatrix}$$

■ Gran interacción (ej. 2.5)

$$FTLA = \frac{1}{s^2+s+1} \begin{pmatrix} s+5 & s-6 & s+1 \\ s+3 & s+4 & s+2 \\ s-6 & s-5 & s+7 \end{pmatrix}$$



$$RGA = \begin{pmatrix} 0.478 & 0.498 & 0.023 \\ 0.279 & 0.413 & 0.307 \\ 0.242 & 0.088 & 0.670 \end{pmatrix}$$

**MAYOR INTERACCIÓN →
MÉTODOS AVANZADOS DE CONTROL**

Ejemplo de emparejamiento (5x5)

Torre atmosférica de crudo (McAvoy, 1983)

Posibles emparejamientos (120)

Secuencia propuesta para los emparejamientos:

$$T_1-m_1 ; T_2-m_5 ; T_4-m_3 ; T_3-m_2 ; T_5-m_4$$

	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5
T_1	0.929	$4.6E-3$	0.068	$-2.04E-3$	$1.17E-3$
T_2	0.019	0.623	-1.36	0.059	1.66
T_3	-0.042	1.09	0.748	-0.079	-0.718
T_4	0.159	-2.180	3.84	-0.869	0.043
T_5	-0.064	1.46	-2.30	1.89	0.0137



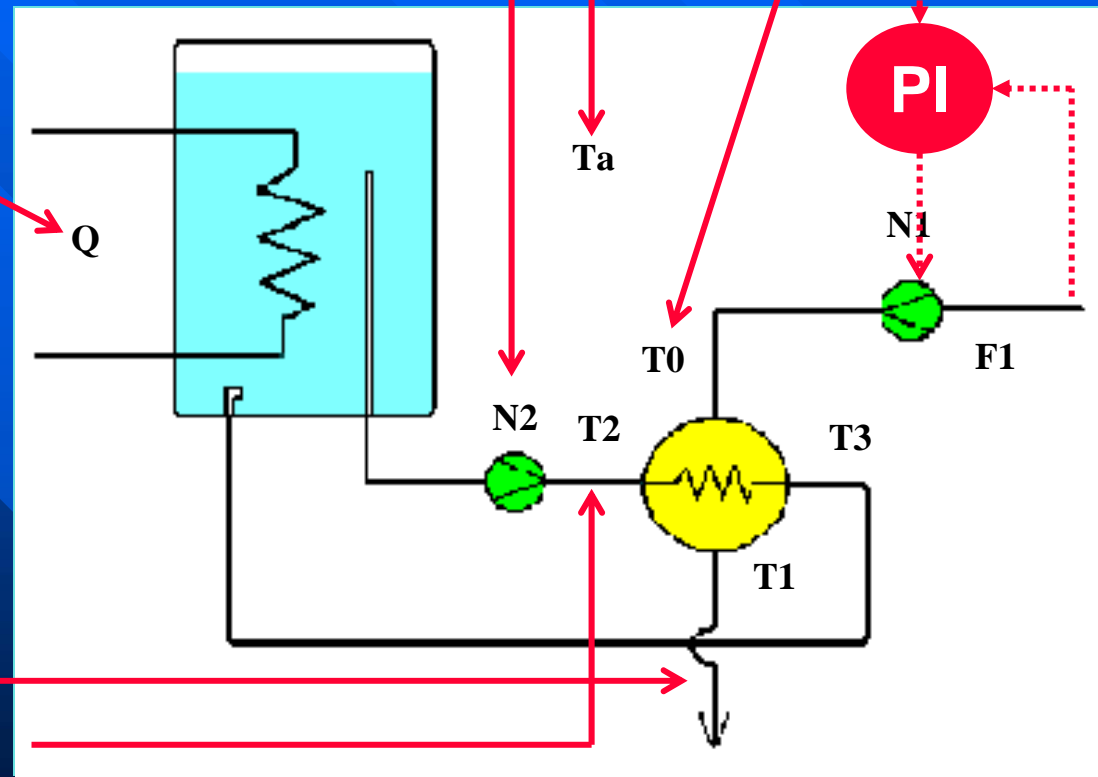
Intercambio de calor: visto como (2x2)

2 perturbaciones:

temperatura del líquido frío a la entrada (T_0)
temperatura ambiente (T_a)

2 manipuladas:

velocidad (N_2) de la bomba
potencia (Q) calefactora



2 controladas:

temperatura líquido (T_1)
temperatura líquido calefactor (T_2)

1 controlador de caudal, lazo $N_1 - F_1$:

simple, más rápido,
interacciona poco con los otros dos

Modelo dinámico del intercambio de calor

Modelo dinámico

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.021 \frac{6000s+1}{1400s+1} & \frac{0.028}{638s+1} e^{-200s} \\ \frac{-0.19}{250s+1} e^{-80s} & \frac{0.049}{824s+1} e^{-200s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_2 \\ Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.55 \frac{850s+1}{1920s+1} \\ \frac{-0.32}{1400s+1} e^{-200s} \end{pmatrix} N_1$$

Límite $s \rightarrow 0$

$$K = \begin{pmatrix} 0.021 & 0.028 \\ -0.19 & 0.049 \end{pmatrix}$$

Hay interacción, no severa, y los emparejamientos recomendados no están en la diagonal: T_1 - Q ; T_2 - N_2

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \frac{k_{T_1 N_2} k_{T_2 Q}}{k_{T_1 N_2} k_{T_2 Q} - k_{T_1 Q} k_{T_2 N_2}} & \frac{-k_{T_1 Q} k_{T_2 N_2}}{k_{T_1 N_2} k_{T_2 Q} - k_{T_1 Q} k_{T_2 N_2}} \\ \frac{-k_{T_1 Q} k_{T_2 N_2}}{k_{T_1 N_2} k_{T_2 Q} - k_{T_1 Q} k_{T_2 N_2}} & \frac{k_{T_1 N_2} k_{T_2 Q}}{k_{T_1 N_2} k_{T_2 Q} - k_{T_1 Q} k_{T_2 N_2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.84 \\ 0.84 & 0.16 \end{pmatrix}$$

Modelo estático del intercambio de calor

Modelo
estático

Balance energético en el intercambiador
Balance energético en el calefactor
Caracterización del intercambiador
Caracterización de las bombas

$$F_1 c_e (T_1 - T_o) = F_2 c_e (T_2 - T_3)$$

$$Q = F_2 c_e (T_2 - T_3) + \beta (T_2 - T_a)$$

$$\mu \frac{(T_3 - T_o) - (T_2 - T_1)}{\ln \frac{T_3 - T_o}{T_2 - T_1}} = F_1 c_e (T_1 - T_o)$$

$$F_1 = a_1 N_1 + b_1$$

$$F_2 = a_2 N_2 + b_2$$

Matriz K genérica del intercambio de calor

$$K = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial T_1}{\partial N_2} \right|_Q & \left. \frac{\partial T_1}{\partial Q} \right|_{N_2} \\ \left. \frac{\partial T_2}{\partial N_2} \right|_Q & \left. \frac{\partial T_2}{\partial Q} \right|_{N_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial T_1}{\partial N_2} \right|_Q & \left. \frac{\partial T_1}{\partial Q} \right|_{N_2} \\ -\frac{F_1 c_e}{\beta} \left. \frac{\partial T_1}{\partial N_2} \right|_Q & \frac{1}{\beta} - \frac{F_1 c_e}{\beta} \left. \frac{\partial T_1}{\partial Q} \right|_{N_2} \end{pmatrix}$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial N_2} \right|_Q = a_2 \frac{\beta e^{\mu/F_2 c_e} (T_0 \beta - \beta T_a - Q) \left[e^{\mu/F_1 c_e} (F_1 (F_2 c_e + \mu) - F_2 \mu) - F_1 F_2 c_e e^{\mu/F_2 c_e} \right]}{F_2 c_e \left[F_2 e^{\mu/F_1 c_e} (F_1 c_e + \beta) - F_1 e^{\mu/F_2 c_e} (F_2 c_e + \beta) \right]^2}$$

$$\left. \frac{\partial T_1}{\partial Q} \right|_{N_2} = \frac{F_2 \left[e^{\mu/F_1 c_e} - e^{\mu/F_2 c_e} \right]}{F_2 e^{\mu/F_1 c_e} (F_1 c_e + \beta) - F_1 e^{\mu/F_2 c_e} (F_2 c_e + \beta)}$$

VENTAJA → EVALUAR NUMÉRICAMENTE CON DATOS EXPERIMENTALES

RGA particularizada del intercambio de calor

Punto de operación:

$$T_0, T_1, T_2, T_3, T_a, F_1, F_2, Q$$

Caracterización de las bombas:

$$a_1, b_1, a_2, b_2$$

Caracterización de las pérdidas y del intercambiador

$$\beta, \mu$$

Cálculo de las derivadas parciales

Formación de K

Cálculo de la RGA

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.17 & 0.83 \\ 0.83 & 0.17 \end{pmatrix}$$

Comparación del modelo estático y dinámico

SSGM:

$$K = \begin{pmatrix} 0.021 & 0.028 \\ -0.19 & 0.049 \end{pmatrix}$$

M. estático

$$K = \begin{pmatrix} 0.015 & 0.024 \\ -0.11 & 0.037 \end{pmatrix}$$

M. dinámico

RGA:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.16 & 0.84 \\ 0.84 & 0.16 \end{pmatrix}$$

M. estático

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.17 & 0.83 \\ 0.83 & 0.17 \end{pmatrix}$$

M. dinámico

Errores en la identificación
Modelos obtenidos de experiencias reales

Contenido

- **Tema 2 : Medidas de interacción**
 - Matriz de Ganancias Relativas RGA
 - **Matriz de Ganancias Relativas Generalizada GRGA**
 - Descomposición en Valores Singulares SVD
 - Número de Condición γ

Matriz de ganancias en estado estacionario (mxn)

$$y = K u$$

$$(m \times 1) \quad (m \times n) \quad (n \times 1)$$

MV's



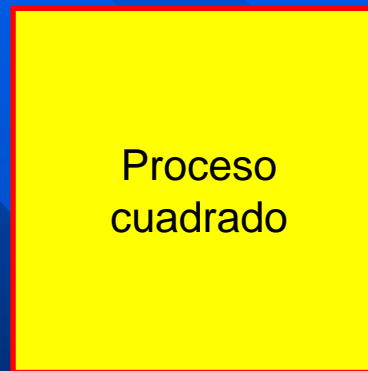
Proceso estrecho

$$m > n$$

grados de libertad < 0

$u = K^+ y$
la mejor alternativa

MV's



Proceso cuadrado

$$m = n$$

grados de libertad $= 0$

$u = K^{-1} y$
única

MV's



Proceso amplio

$$m < n$$

grados de libertad > 0

parte fija
y otra parte $\hat{u} = L^{-1} y$

Matriz de ganancias relativas generalizada (mxn)

$$K = \begin{pmatrix} k_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ k_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & k_{mn} \end{pmatrix}$$



$$\Lambda = K \times (K^+)^T$$

En matlab: `grga = k .* (pinv(k))'`

Propiedades de la GRGA (mxn)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{1n} \\ \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \lambda_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\text{si } m \leq n ; \sum_{i=1}^n \lambda_{ji} = 1$$

$$\text{si } m \geq n ; \sum_{j=1}^m \lambda_{ji} = 1$$

Selección a través de la GRGA (m x n)

Proceso de hidroalquilización del tolueno (Cao, 1996): 5 variables controladas, 13 variables candidatas a ser manipuladas (ej. 2.8).

Cao propone utilizar también las sumas de las columnas de la GRGA si $m < n$, o de sus filas si $n > m$, para seleccionar los mejores emparejamientos

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.1275 & -0.0755 & 0.5907 & 0.1215 & 0.0034 \\ 0.0656 & -0.0523 & 0.0030 & 0.1294 & 0.0002 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0014 & -0.0017 & 0.0013 & 0.0099 & 0.0000 \\ 0.0129 & -0.0451 & 0.0230 & 0.1873 & -0.0005 \\ 0.0374 & -0.1277 & -0.0359 & 0.1163 & 0.9516 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0268 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.0002 & 0.0002 & 0.0001 & 0.0001 & 0.0000 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^T = \begin{pmatrix} 0.77 \\ 0.15 \\ 0.73 \\ 0.40 \\ 0.95 \\ 0.85 \\ 0.00 \\ 0.01 \\ 0.18 \\ 0.94 \\ 0.03 \\ 0.00 \\ 0.00 \end{pmatrix}$$

4^a
5^a
6^a
1^a
3^a
2^a

Cautela en la selección a través de la GRGA

(Skogestad, 1996) 2 variables manipuladas, 4 variables candidatas a ser controladas (ej. 2.9).

Selección

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -2.57 & 3.27 \\ 1.96 & -1.43 \\ 0.80 & -0.42 \\ 0.80 & -0.42 \end{pmatrix}$$

$$\Lambda_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0.70 \\ 0.53 \\ 0.38 \\ 0.38 \end{pmatrix}$$

1^a

2^a

3^a

Emparejamiento

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} -9 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$$

y1-u2

y2-u1

Emparejamiento

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

y1-u2

y3-u1

Contenido

- **Tema 2 : Medidas de interacción**
 - Matriz de Ganancias Relativas RGA
 - Matriz de Ganancias Relativas Generalizada GRGA
 - **Descomposición en Valores Singulares SVD**
 - Número de Condición γ

Descomposición en valores singulares (SVD)

$$\mathbf{K} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T$$

$(m \times n)$ $(m \times m)$ $(m \times n)$ $(n \times n)$

- **U** es una matriz ortonormal $m \times m$ que representa el conjunto de vectores singulares por la izquierda. Es el sistema de coordenadas más apropiado para observar las variables controladas
- **V** es una matriz ortonormal $n \times n$ que representa el conjunto de vectores singulares por la derecha. Es el sistema de coordenadas más apropiado para observar las variables manipuladas
- **Σ** es una matriz diagonal de escalares llamados valores singulares, los cuales se organizan de forma descendente. Estos valores representan las ganancias en estado estacionario de un sistema multivariable ideal (cada entrada con su salida)

Descomposición en valores singulares (SVD)

Ejemplo: Proceso de mezcla

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1-x}{F} & \frac{-x}{F} \end{bmatrix}$$

Caso concreto (F=1, x=0.75)



$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.25 & -0.75 \end{bmatrix}$$



$$U = \begin{bmatrix} 0.9510 & -0.3092 \\ -0.3092 & -0.9510 \end{bmatrix}$$

Vectores singulares
por la izquierda

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1.4706 & 0 \\ 0 & 0.6800 \end{bmatrix}$$

Valores singulares

$$V = \begin{bmatrix} 0.5941 & -0.8044 \\ 0.8044 & 0.5941 \end{bmatrix}$$

Vectores singulares
por la derecha

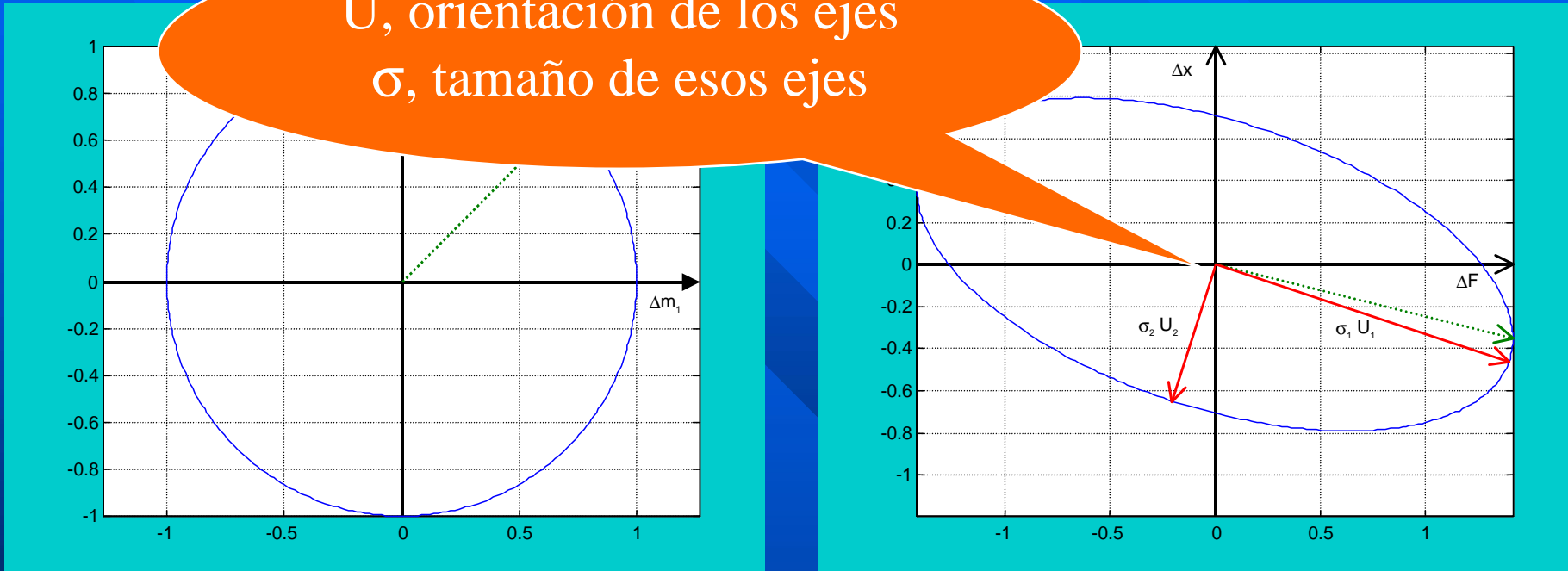
Distintos valores de F y x → Distintas situaciones de control

Significado físico de la descomposición SVD

Ejemplo: Proceso de mezcla ($F=1$, $x=0.75$)

$$\Delta m_1^2 + \Delta m_2^2 = 1$$

U, orientación de los ejes
 σ , tamaño de esos ejes



Plano de cambios en las entradas

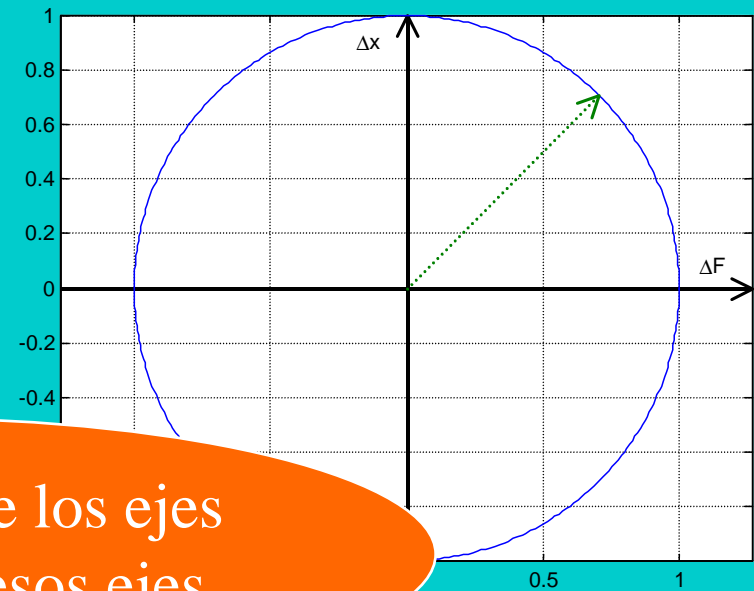
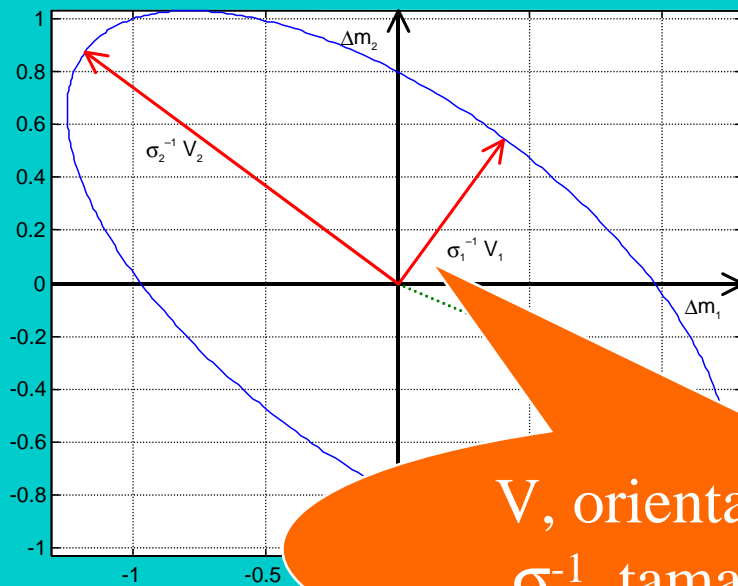
Plano de cambios en las salidas

Mayor inclinación de la elipse \rightarrow mayor interacción
Mayor deformación de la elipse \rightarrow mayor sensibilidad a las entradas

Significado físico de la descomposición SVD

Ejemplo: Proceso de mezcla ($F=1$, $x=0.75$)

$$\Delta F^2 + \Delta x^2 = 1$$



V , orientación de los ejes
 σ^{-1} , tamaño de esos ejes

Plano de cambios en las entradas



Plano de cambios en las salidas

Contenido

- **Tema 2 : Medidas de interacción**
 - Matriz de Ganancias Relativas RGA
 - Matriz de Ganancias Relativas Generalizada GRGA
 - Descomposición en Valores Singulares SVD
 - **Número de Condición γ**

Análisis mediante el número de condición (γ)

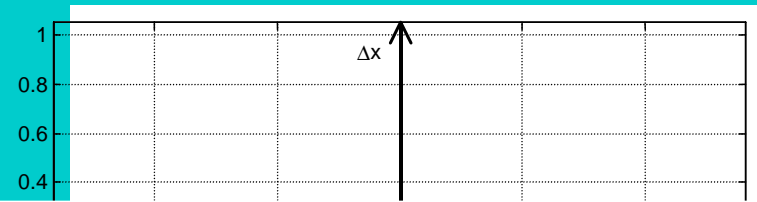
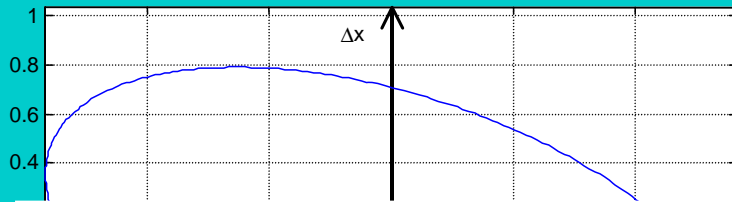
Cociente entre valores singulares (máximo y mínimo)

$$\gamma = \frac{\sigma_1}{\sigma_m}$$

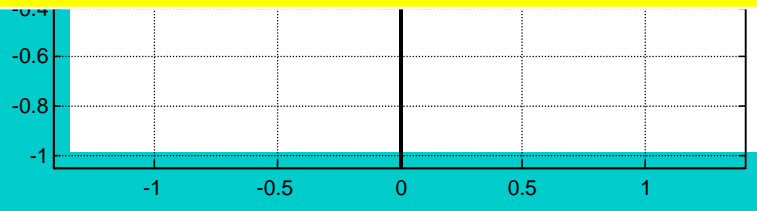
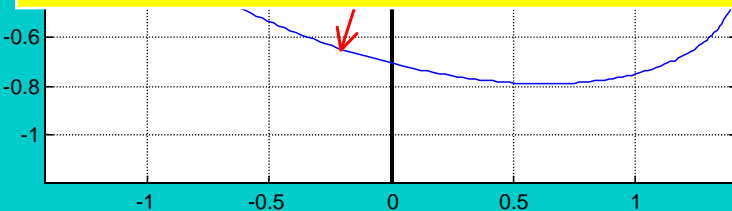
Ejemplo: Proceso de mezcla (influencia del escalado)

$\gamma \cong 2$

$\gamma \cong 10$



El número de condición depende fuertemente del escalado



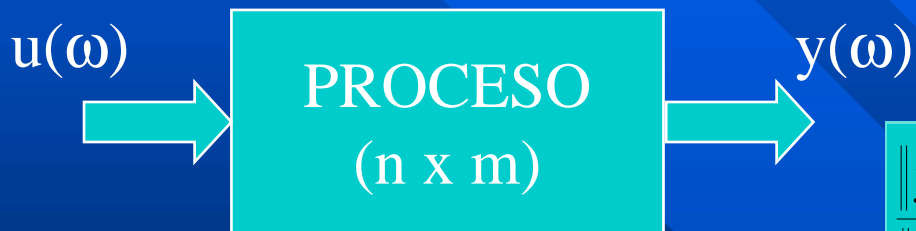
Plano de cambios en las salidas
($F=1$, $x=0.75$)

Plano de cambios en las salidas
($F=5$, $x=0.75$)

Número de condición (γ)



$$\frac{|y(\omega)|}{|u(\omega)|} = \frac{|G(j\omega)u(\omega)|}{|u(\omega)|} = |G(j\omega)|$$



$$\frac{\|y(\omega)\|_2}{\|u(\omega)\|_2} = \frac{\|G(j\omega)u(\omega)\|_2}{\|u(\omega)\|_2} = \frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots}}$$

Cociente entre valores singulares (máximo y mínimo)
Dependiente de la frecuencia
Medida de la controlabilidad entrada-salida

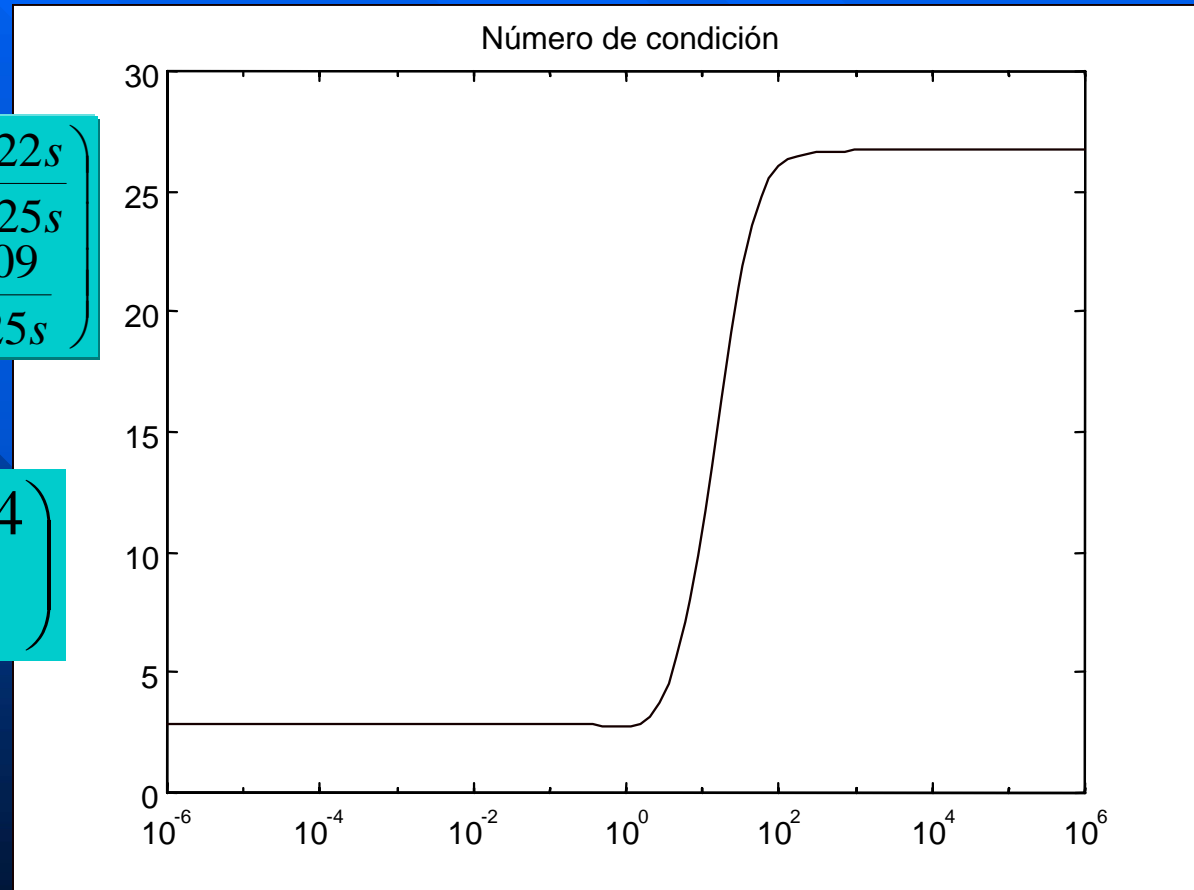
$$\gamma(\omega) = \frac{\sigma_1(\omega)}{\sigma_m(\omega)}$$

Número de condición (γ)

(Smith y Corripio, 1985) 2 variables manipuladas, 2 variables controladas (ej. 2.11).

$$G(s) = \begin{pmatrix} -6 \cdot \frac{1-0.78s}{1+0.25s} & 1.5 \cdot \frac{1-0.22s}{1+0.25s} \\ -5 \cdot \frac{1+0.86s}{1+0.25s} & 7 \cdot \frac{1+0.09}{1+0.25s} \end{pmatrix}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1.2174 & -0.2174 \\ -0.2174 & 1.2174 \end{pmatrix}$$



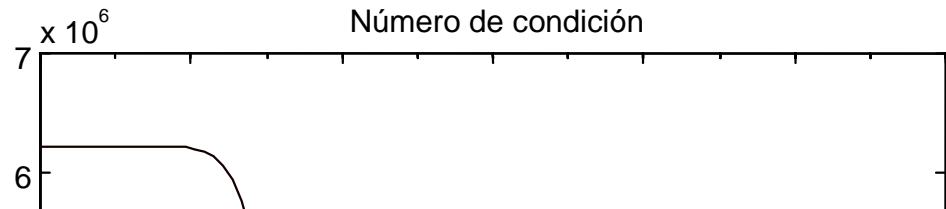
Poca interacción a baja frecuencia

Número de condición (γ)

3 variables manipuladas, 3 variables controladas (ej. 2.14).

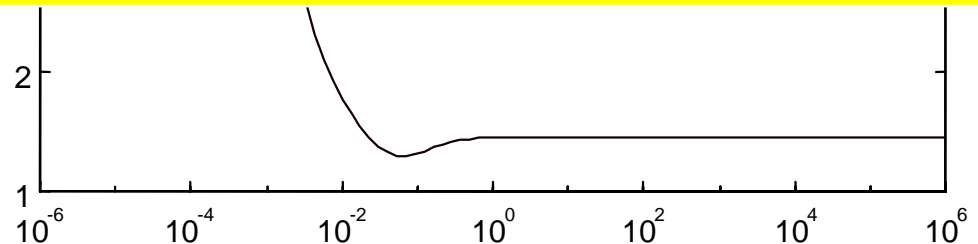
$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{119}{217s+1} & \frac{153}{337s+1} & \frac{-21}{10s+1} \end{pmatrix}$$

$G(s)$



El uso de una sola técnica puede ocultar problemas o mostrar otros de una forma exagerada

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 3.7453 & -1.9752 & -0.7701 \\ -2.4481 & 3.0219 & 0.4262 \\ -0.2972 & -0.0467 & 1.3439 \end{pmatrix}$$



Posible problema de escalado en la entrada

Ejemplo de emparejamiento (5x5)

Torre atmosférica de crudo (McAvoy, 1983)

Secuencia propuesta con la RGA para los emparejamientos:

T_1-m_1 ; T_2-m_5 ; T_4-m_3 ; T_3-m_2 ; T_5-m_4

$$\Lambda = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ T_1 & 0.929 & 4.6E-3 & 0.068 & -2.04E-3 & 1.17E-3 \\ T_2 & 0.019 & 0.623 & -1.36 & 0.059 & 1.66 \\ T_3 & -0.042 & 1.09 & 0.748 & -0.079 & -0.718 \\ T_4 & 0.159 & -2.180 & 3.84 & -0.869 & 0.043 \\ T_5 & -0.064 & 1.46 & -2.30 & 1.89 & 0.0137 \end{matrix}$$

Ejemplo de emparejamiento (5x5)

Descomposición en valores singulares:

$$U = \begin{pmatrix} 0.0190 & -0.2047 & 0.9623 & 0.0437 & -0.1726 \\ 0.8227 & 0.0793 & 0.0872 & -0.4062 & 0.3798 \\ 0.5679 & -0.0961 & -0.1590 & 0.5679 & -0.5661 \\ 0.0160 & -0.7319 & -0.0745 & 0.3907 & 0.5531 \\ -0.0077 & -0.6379 & -0.1885 & -0.5983 & -0.4467 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.5124 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3654 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0539 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0161 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.0681 & -0.6163 & 0.7843 & -0.0135 & 0.0132 \\ -0.0071 & -0.5317 & -0.3993 & 0.4699 & -0.5806 \\ -0.1602 & -0.4956 & -0.3875 & 0.0456 & 0.7593 \\ -0.1886 & -0.2867 & -0.2189 & -0.8673 & -0.2865 \\ -0.9665 & 0.0985 & 0.1651 & 0.1573 & -0.0647 \end{pmatrix}$$

Ejemplo de emparejamiento (5x5)

Se buscan por columnas los valores de mayor peso en U y V:

$$U = \begin{pmatrix} 0.0190 & -0.2047 & 0.9623 & 0.0437 & -0.1726 \\ 0.8227 & 0.0793 & 0.0872 & -0.4062 & 0.3798 \\ 0.5679 & -0.0961 & -0.1590 & 0.5679 & -0.5661 \\ 0.0160 & -0.7319 & -0.0745 & 0.3907 & 0.5531 \\ -0.0077 & -0.6379 & -0.1885 & -0.5983 & -0.4467 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.5124 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3654 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0539 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0161 \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.0681 & -0.6163 & 0.7843 & -0.0135 & 0.0132 \\ -0.0071 & -0.5317 & -0.3993 & 0.4699 & -0.5806 \\ -0.1602 & -0.4956 & -0.3875 & 0.0456 & 0.7593 \\ -0.1886 & -0.2867 & -0.2189 & -0.8673 & -0.2865 \\ -0.9665 & 0.0985 & 0.1651 & 0.1573 & -0.0647 \end{pmatrix}$$

T_2-m_5 ; T_4-m_1 ; T_1-m_2 ; T_5-m_4 ; T_3-m_3

Ejemplo de emparejamiento (5x5)

Si se marcan los emparejamientos SVD sobre la RGA:

$$T_1-m_2 ; T_2-m_5 ; T_3-m_3 ; T_4-m_1 ; T_5-m_4$$

$$\Lambda = \begin{matrix} & m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & m_5 \\ T_1 & 0.929 & 4.6E-3 & 0.068 & -2.04E-3 & 1.17E-3 \\ T_2 & 0.019 & 0.623 & -1.36 & 0.059 & 1.66 \\ T_3 & -0.042 & 1.09 & 0.748 & -0.079 & -0.718 \\ T_4 & 0.159 & -2.180 & 3.84 & -0.869 & 0.043 \\ T_5 & -0.064 & 1.46 & -2.30 & 1.89 & 0.0137 \end{matrix}$$

A partir de la RGA los emparejamientos propuestos eran:

$$T_1-m_1 ; T_2-m_5 ; T_3-m_2 ; T_4-m_3 ; T_5-m_4$$

Ejemplo de emparejamiento (5x5)

A partir de la RGA los emparejamientos propuestos eran:

$$\mathbf{T}_1\text{-}\mathbf{m}_1 ; \mathbf{T}_2\text{-}\mathbf{m}_5 ; \mathbf{T}_3\text{-}\mathbf{m}_2 ; \mathbf{T}_4\text{-}\mathbf{m}_3 ; \mathbf{T}_5\text{-}\mathbf{m}_4$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0.0190 & -0.2047 & 0.9623 & 0.0437 & -0.1726 \\ 0.8227 & 0.0793 & 0.0872 & -0.4062 & 0.3798 \\ 0.5679 & -0.0961 & -0.1590 & 0.5679 & -0.5661 \\ 0.0160 & -0.7319 & -0.0745 & 0.3907 & 0.5531 \\ -0.0077 & -0.6379 & -0.1885 & -0.5983 & -0.4467 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.5124 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3654 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0539 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0161 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0.0681 & -0.6163 & 0.7843 & -0.0135 & 0.0132 \\ -0.0071 & -0.5317 & -0.3993 & 0.4699 & -0.5806 \\ -0.1602 & -0.4956 & -0.3875 & 0.0456 & 0.7593 \\ -0.1886 & -0.2867 & -0.2189 & -0.8673 & -0.2865 \\ -0.9665 & 0.0985 & 0.1651 & 0.1573 & -0.0647 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_1\text{-}\mathbf{m}_2 ; \mathbf{T}_2\text{-}\mathbf{m}_5 ; \mathbf{T}_3\text{-}\mathbf{m}_3 ; \mathbf{T}_4\text{-}\mathbf{m}_1 ; \mathbf{T}_5\text{-}\mathbf{m}_4$$

CONTROL MULTIVARIABLE

Fernando Morilla García

Dpto. de Informática y Automática

fmorilla@dia.uned.es

Contenido

- Tema 1: Introducción al control multivariable
- Tema 2 : Medidas de interacción
- **Tema 3 : Control descentralizado**
- Tema 4 : Control centralizado

METODOLOGÍA

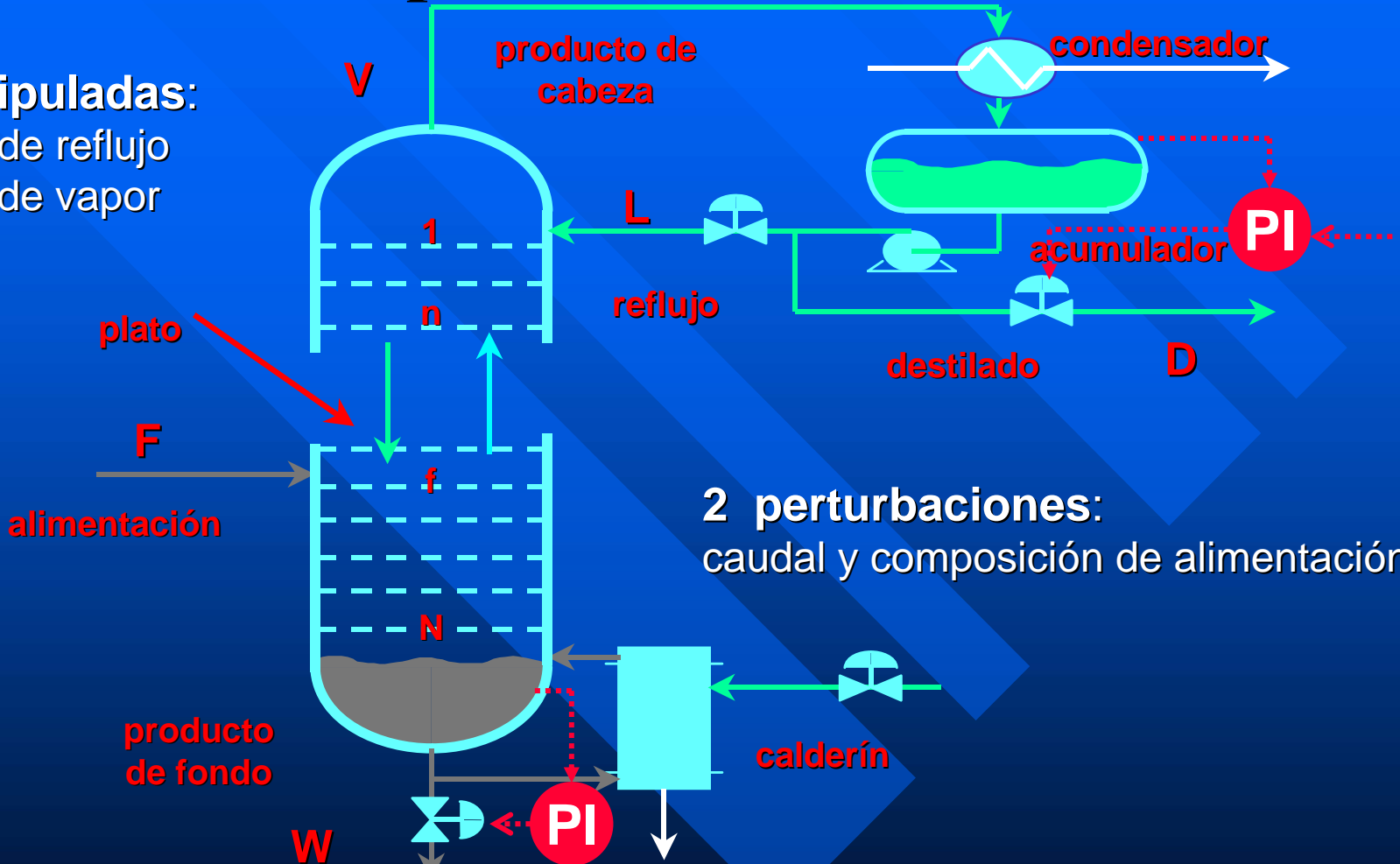
- Selección de las variables controladas
- Selección de las variables manipuladas
- Selección de la configuración de control
 - Control Centralizado
 - **Control Descentralizado**
- **Selección del tipo de controlador**

Características del control descentralizado

- m variables de salida (variables controladas)
- m variables de entrada (variables manipuladas)
- m controladores independientes
- Ordenación diagonal de los emparejamientos:
 - El controlador i -ésimo toma decisiones sobre la i -ésima variable manipulada en función del comportamiento de la i -ésima variable controlada
- Uso generalizado de controladores PID

Columna rectificadora: vista como proceso (2x2)

2 manipuladas:
caudal de reflujo
caudal de vapor



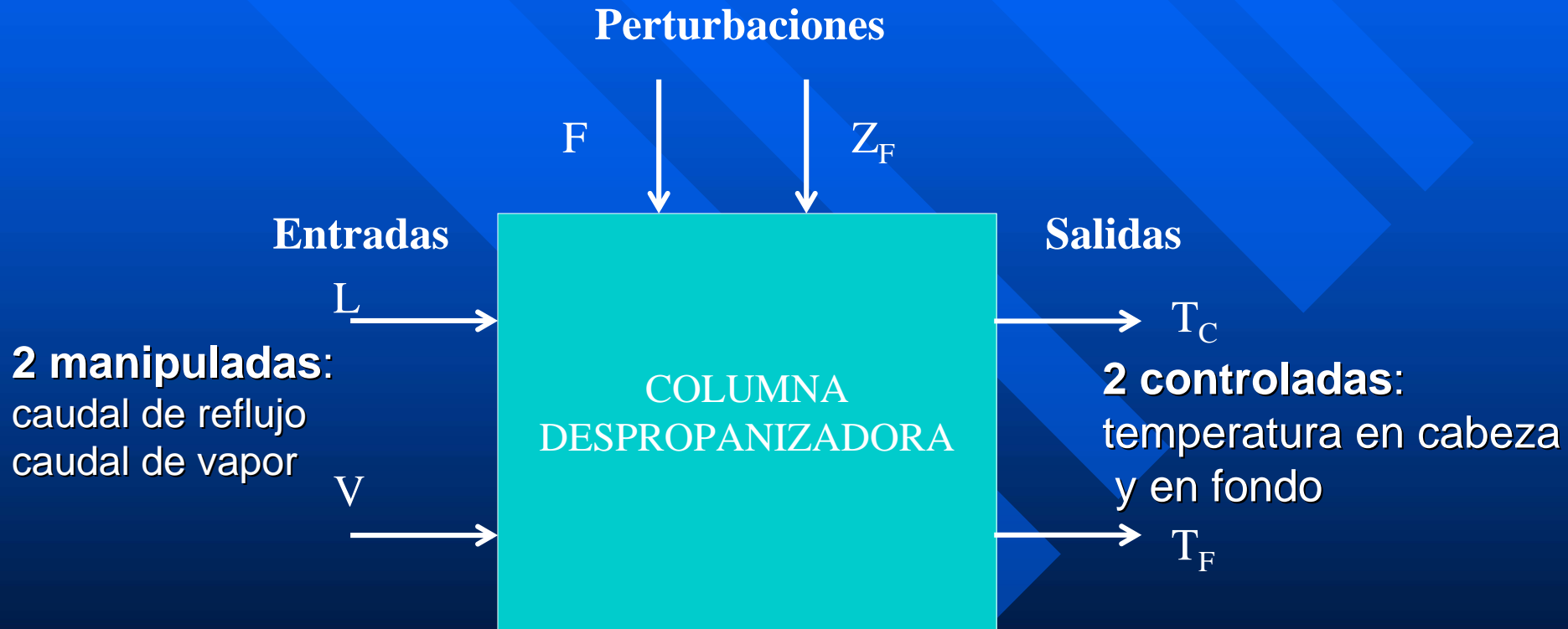
2 perturbaciones:
caudal y composición de alimentación

2 controladores de nivel:
simples, más rápidos,
interaccionan poco con los otros dos

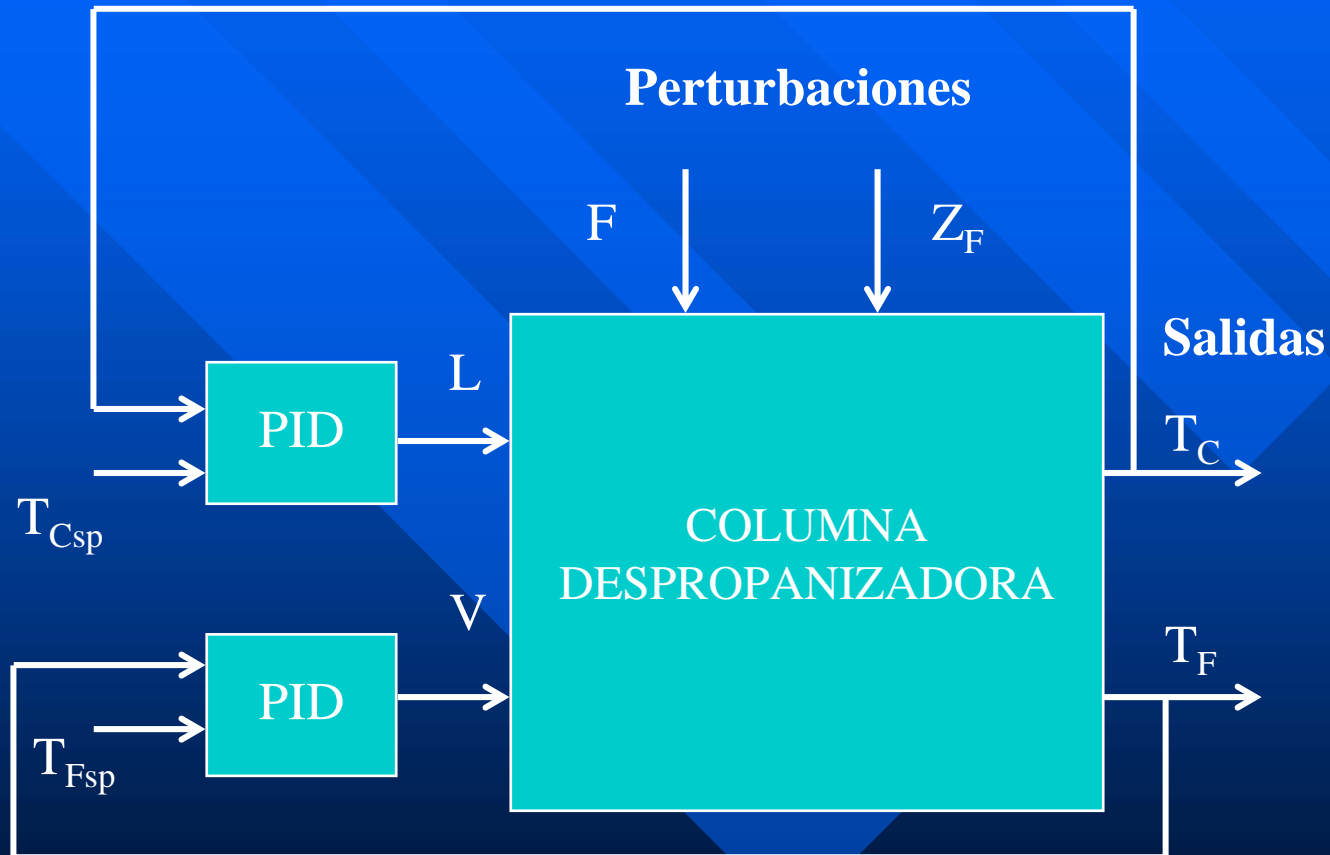
2 controladas:
composición en cabeza y en fondo

Ejemplo de columna rectificadora

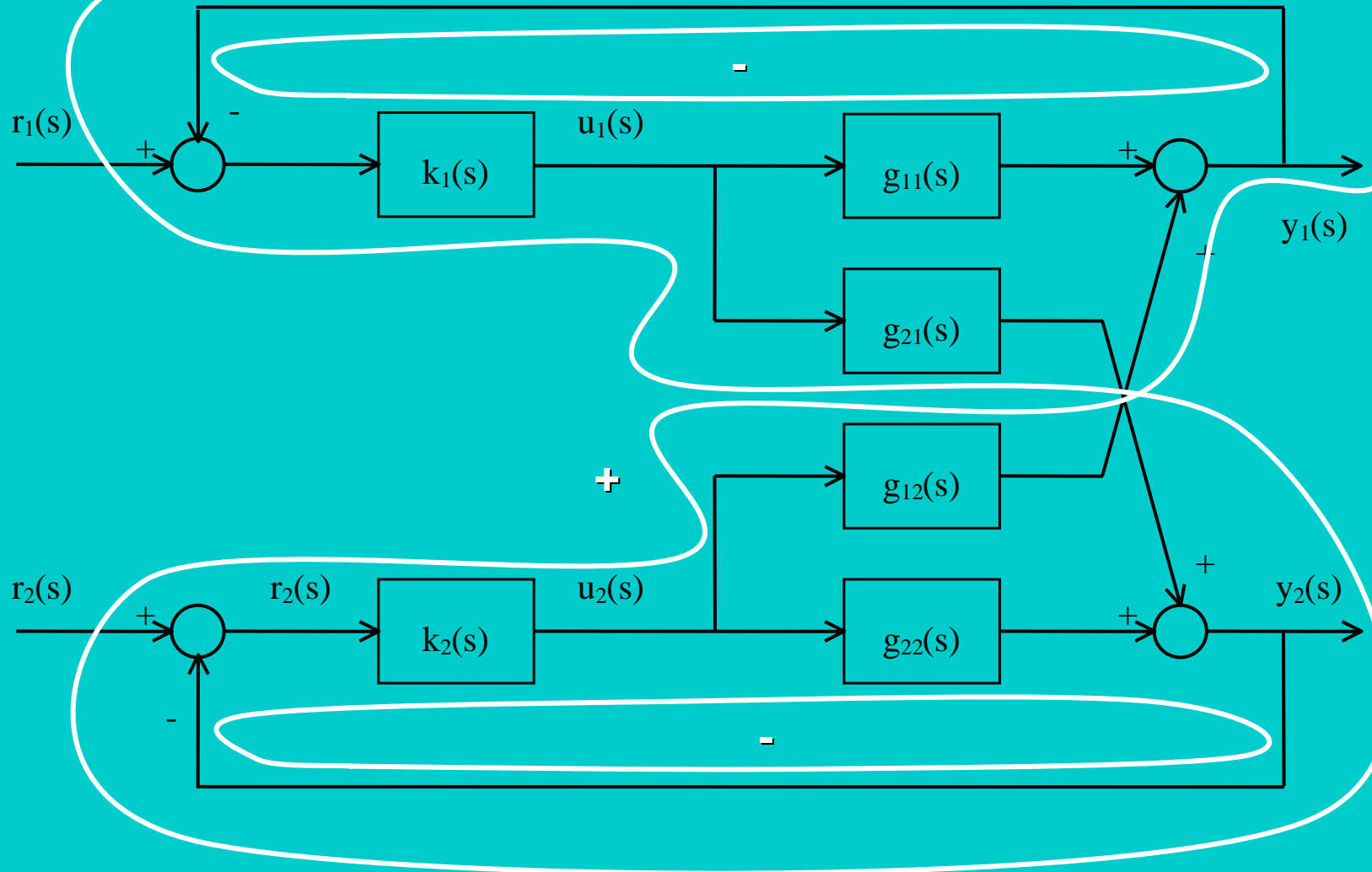
2 perturbaciones:
caudal y composición de alimentación



Control descentralizado de la columna rectificadora



Estabilidad



Ecuación característica

$$1 + k_1(s) \tilde{g}_1(s) = 0$$

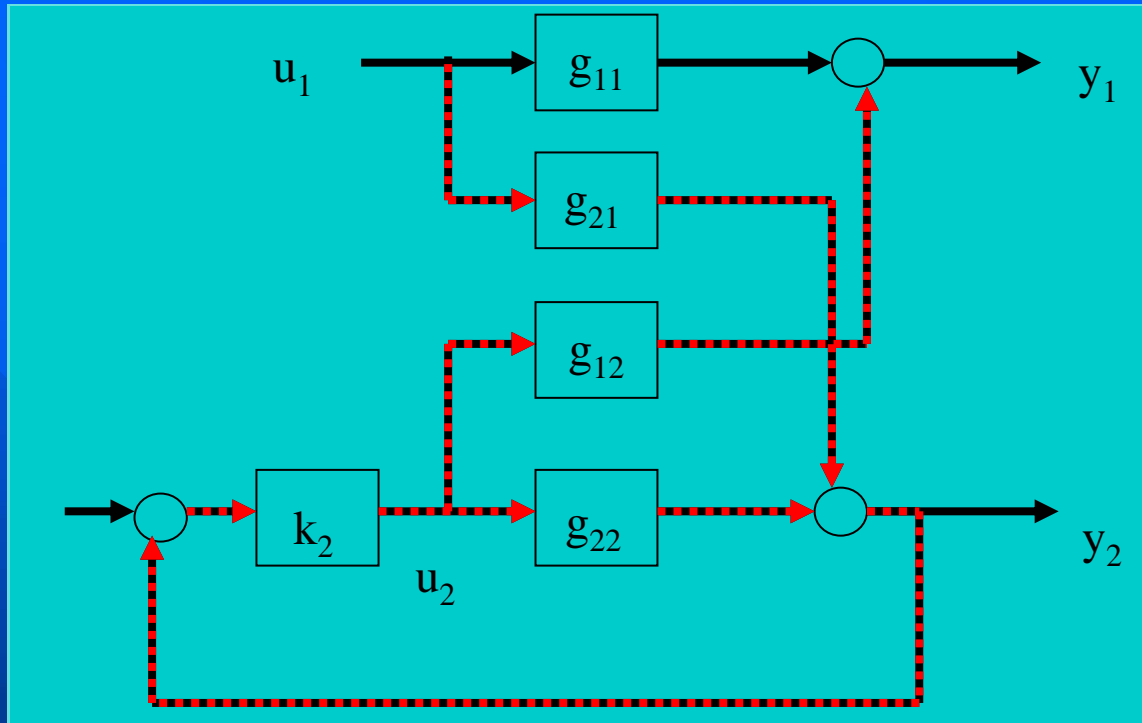
$$\tilde{g}_1(s) = g_{11}(s) + a_1(s) = g_{11}(s) - \frac{k_2(s) g_{12}(s) g_{21}(s)}{1 + k_2(s) g_{22}(s)}$$



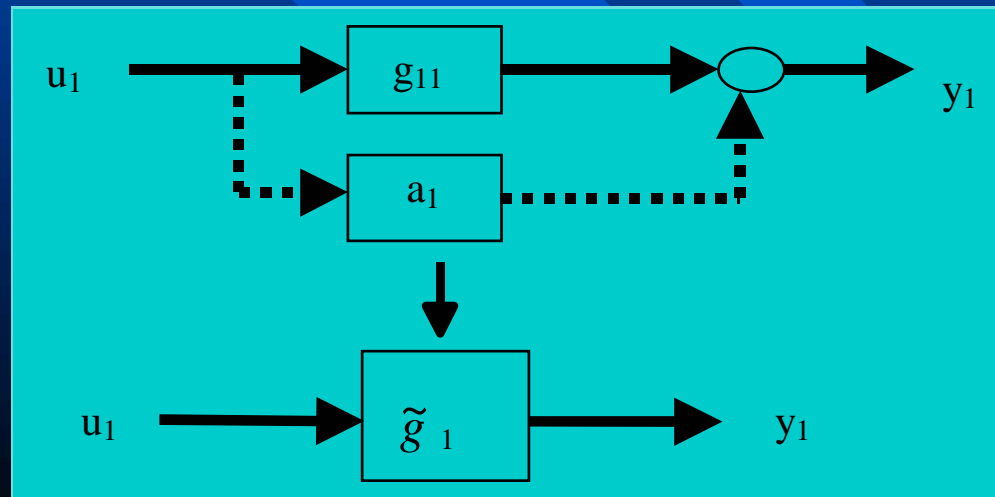
$$(1 + k_1(s) g_{11}(s)) (1 + k_2(s) g_{22}(s)) - k_1(s) k_2(s) g_{12}(s) g_{21}(s) = 0$$

Justificación (2 x 2)

2 x 2

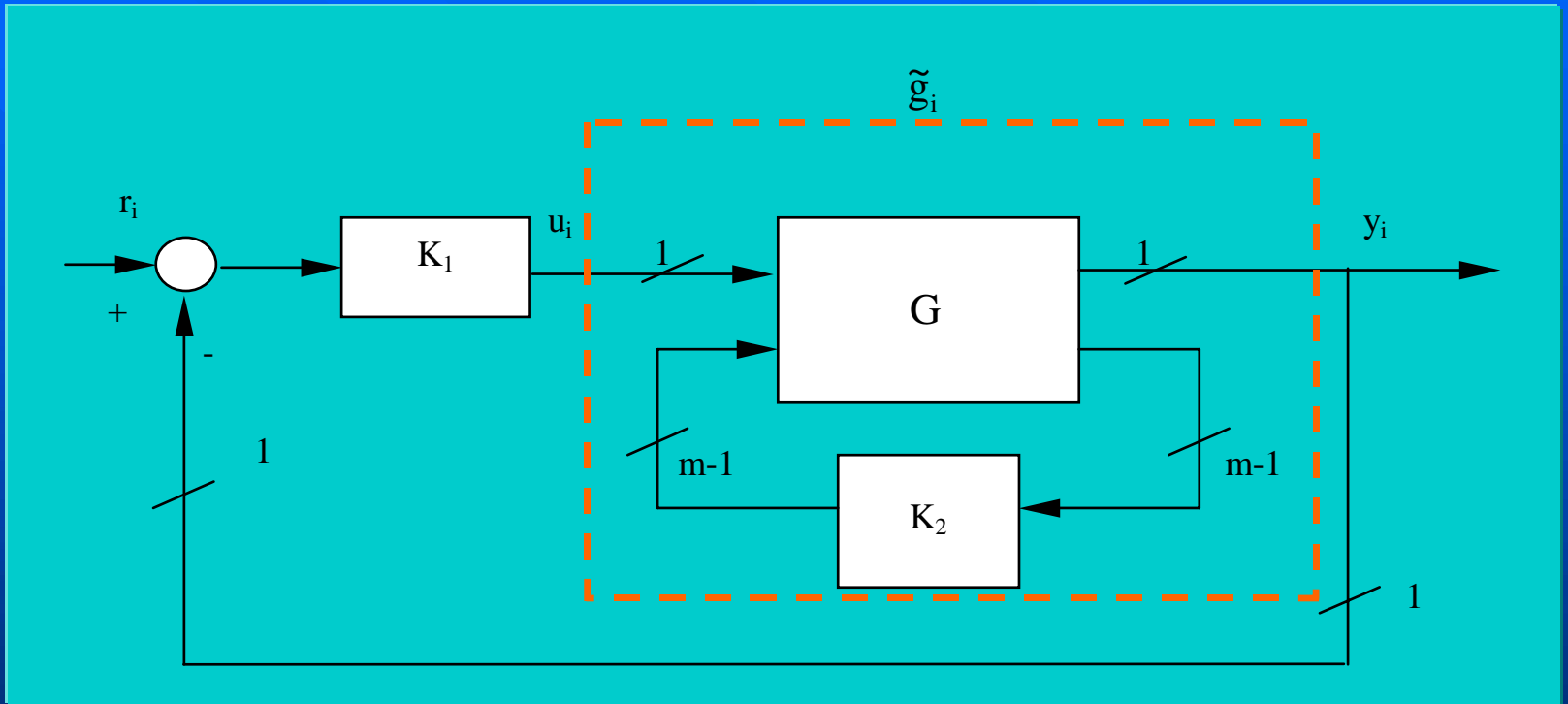


2
1 x 1



Justificación ($m \times m$)

m
 1×1



Descomposición estructural (Zhu, 1998)

Análisis de estabilidad en sistemas multivariables

- DNA (Diagrama de Nyquist Directo)
 - $m \times m$ diagramas de Nyquist de $Q(s)=G(s) K(s)$
- INA (Diagrama de Nyquist Inverso)
 - $m \times m$ diagramas de Nyquist de $Q^{-1}(s)$
- Bandas de Gershgorin
 - bandas sobre los m diagramas de la diagonal
- Teorema de Nyquist generalizado
 - $I + k G(s)$; m controladores proporcionales de la misma ganancia k ; lugar característico

Análisis de estabilidad en sistemas multivariables

- Teorema de Gershgorin
 - Condición suficiente pero no necesaria
- SDNA (Diagrama Estructural de Nyquist Directo)
 - m diagramas de Nyquist de $k_i(s) \tilde{g}_i(s)$
 - Condición necesaria y suficiente
- Dominancia diagonal

Modelo de columna rectificadora

2 manipuladas:
caudal de reflujo
caudal de vapor

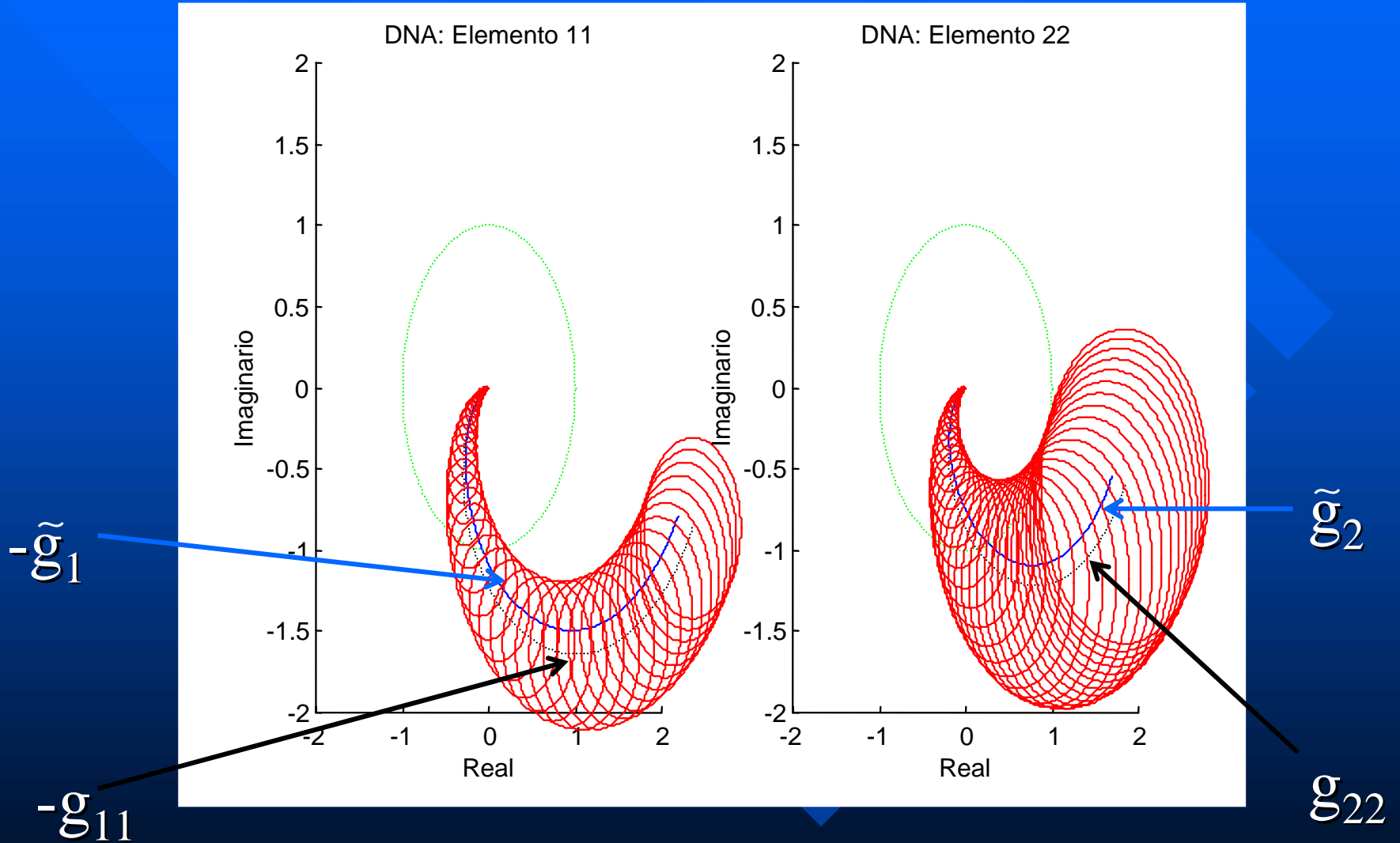
2 controladas:
temperatura en cabeza
y en fondo

$$G(s) = \begin{pmatrix} -\frac{2.6}{(23.7s+1)(11.8s+1)} & \frac{1}{(17.9s+1)^2} \\ -\frac{0.57}{(19.7s+1)(9.3s+1)} & \frac{2}{(24.3s+1)(8.1s+1)} \end{pmatrix}$$

RGA

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1.1231 & -0.1231 \\ -0.1231 & 1.1231 \end{pmatrix}$$

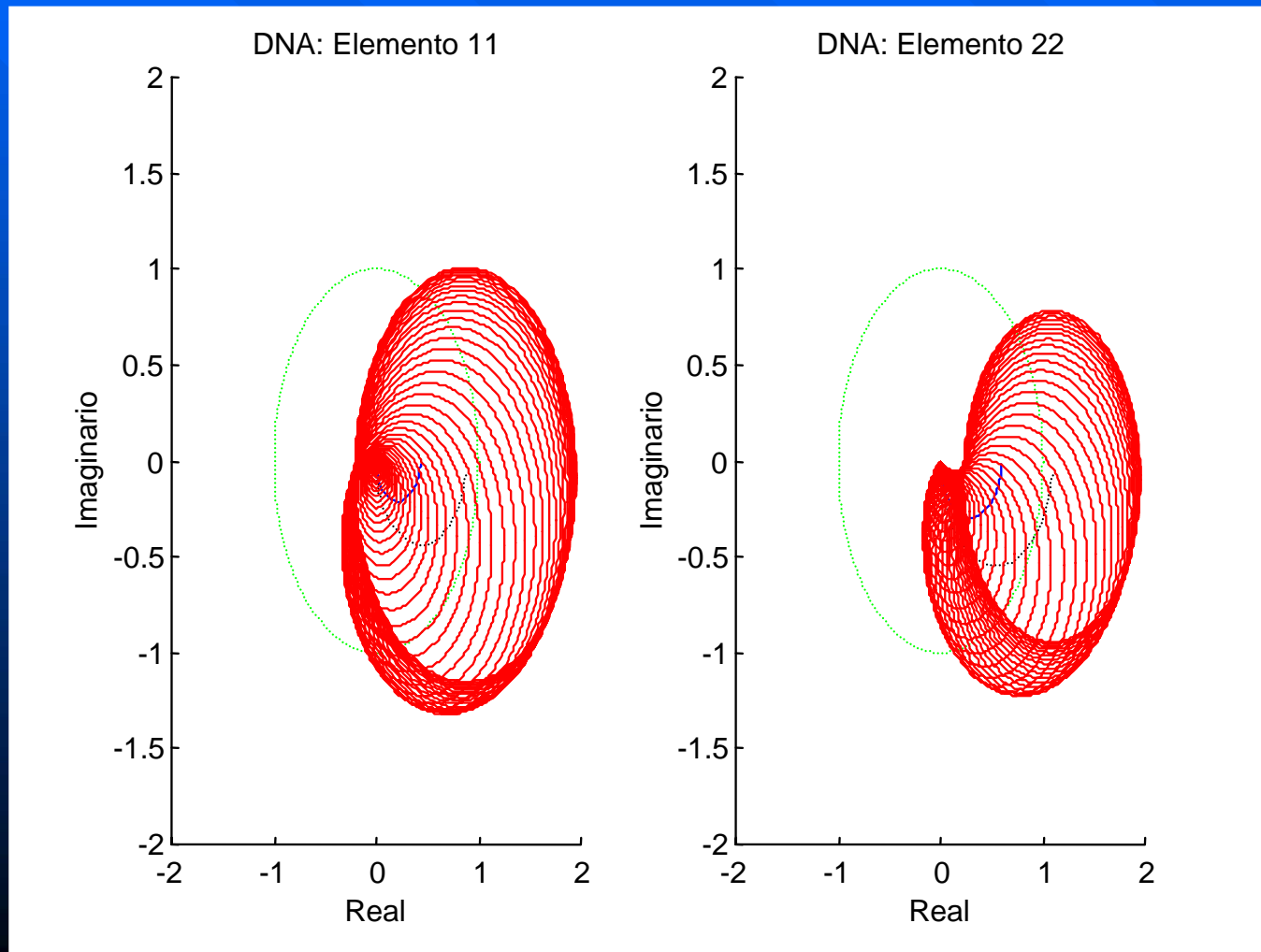
DNA del modelo de columna rectificadora



DNA de columna mal condicionada

$$G(s) = \frac{1}{75s + 1} \begin{pmatrix} 0.878 & -0.864 \\ 1.082 & -1.096 \end{pmatrix}$$

$$RGA = \begin{pmatrix} 35.1 & -34.1 \\ -34.1 & 35.1 \end{pmatrix}$$



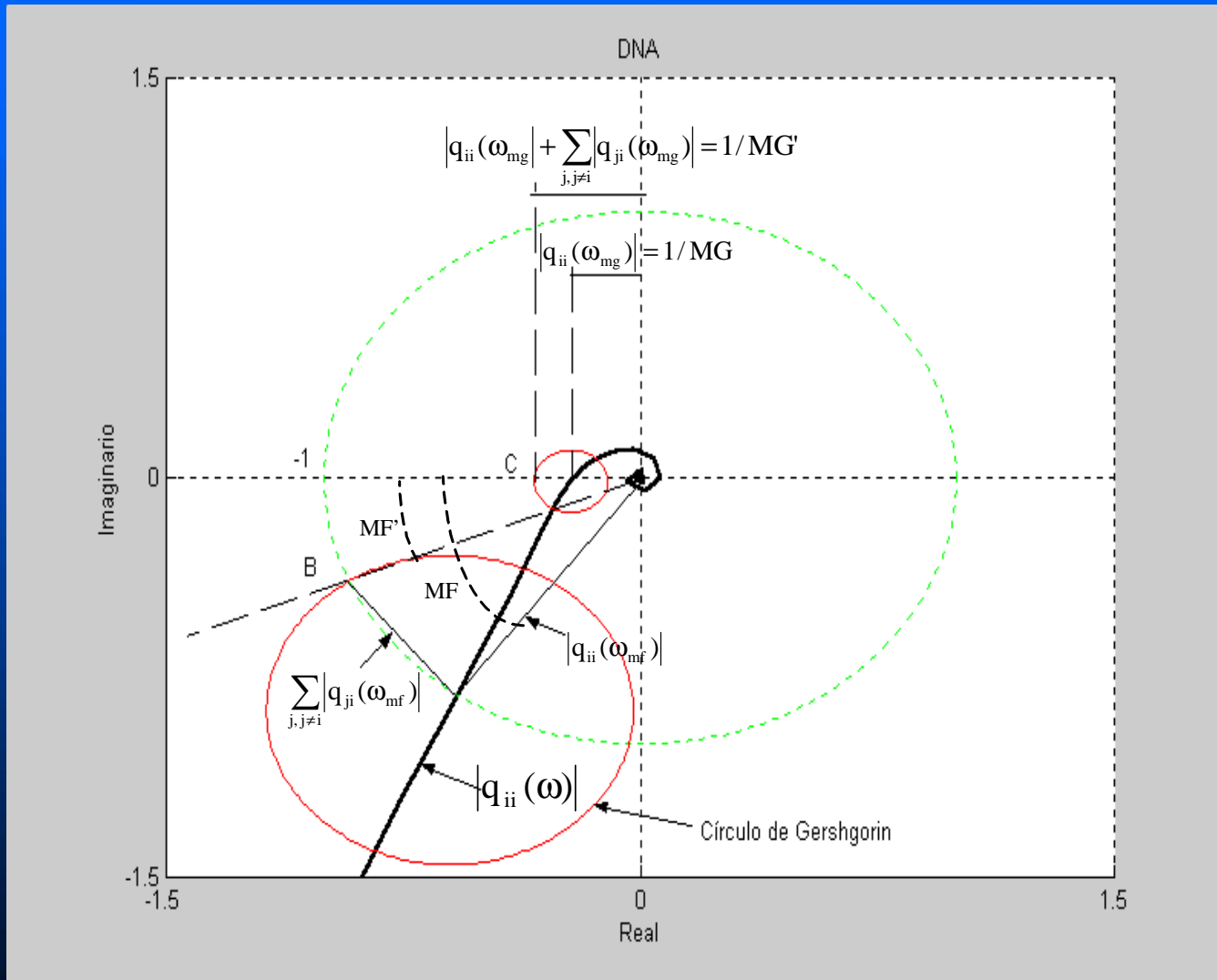
Sintonía en Control Descentralizado

- Particularizada a controladores PID
- Tres enfoques:
 - Fórmulas heurísticas \equiv fórmulas SISO+correcciones
 - » Ej: Shinskey (1988)
 - Extensión del método del relé \equiv múltiples relés
 - » Ej: Wang (1996)
 - Multivariable
 - » Ej: Ho (1996)
- Propuesta para 2x2 incluida en la herramienta TITO (Vázquez, 2001)

Correcciones propuestas de Shinskey

	$0 < \lambda < 1$	$1 < \lambda < \infty$
Lazo rápidos interactuando con lazos lentos	No modificar los parámetros	No modificar los parámetros
	$K_p' = K_p \lambda$	No modificar los parámetros
Lazos similares	$K_p' = K_p (0.22 + 0.78 \lambda)$	$K_p' = K_p (\lambda(1 - \sqrt{1 - 1/\lambda}))$
	$T_i' = T_i / (0.22 + 0.78 \lambda)$	$T_i' = T_i$
	$T_d' = T_d / (0.22 + 0.78 \lambda)$	$T_d' = 0$

Fundamentos del método de Ho

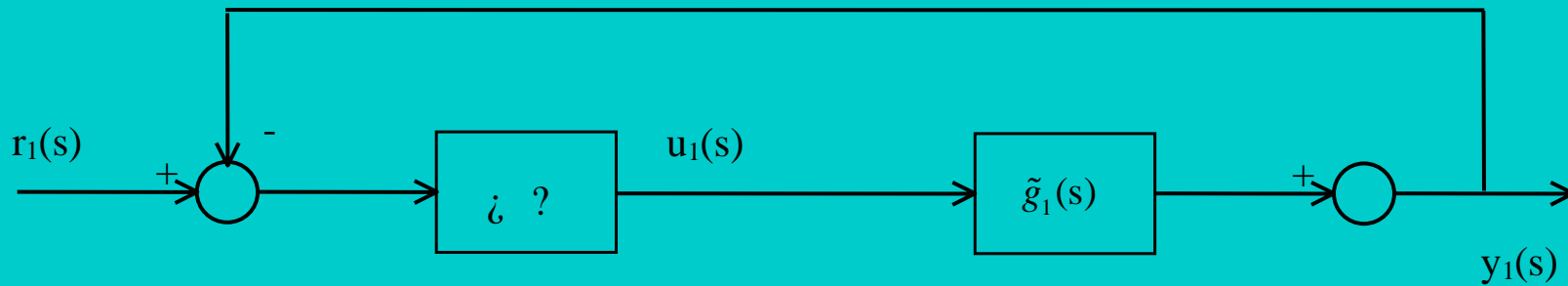
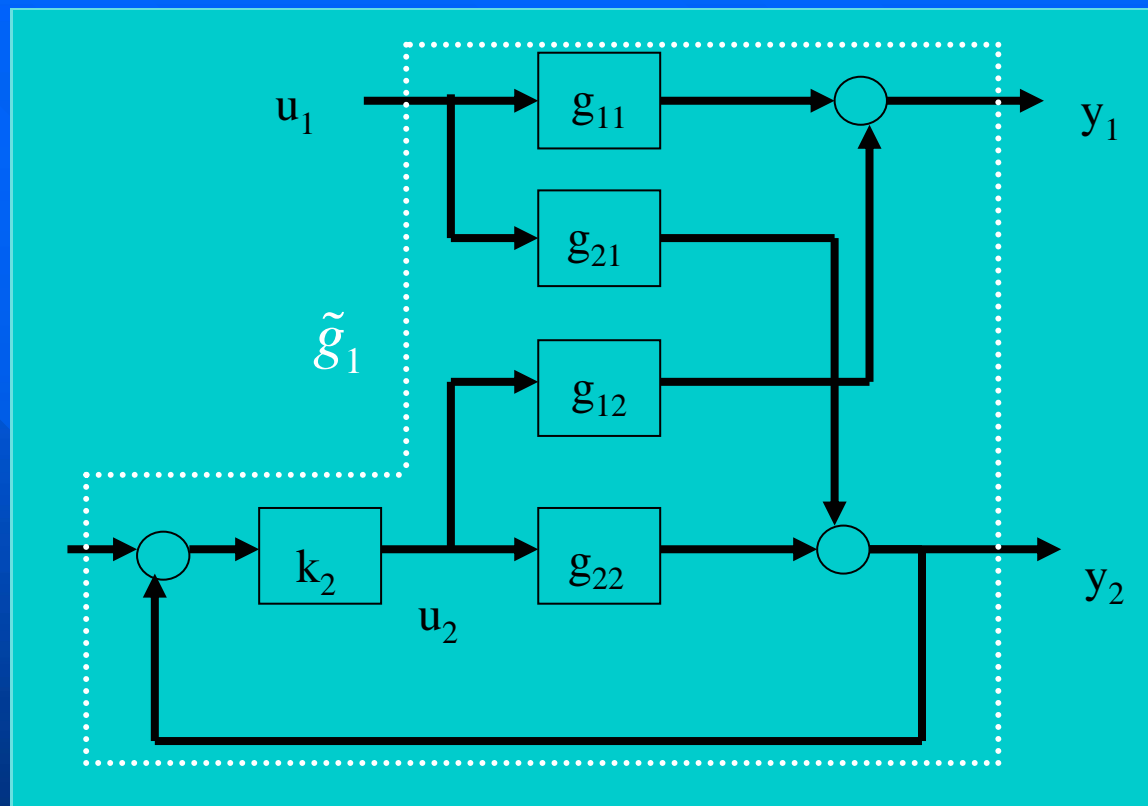


Limitaciones del método de Ho

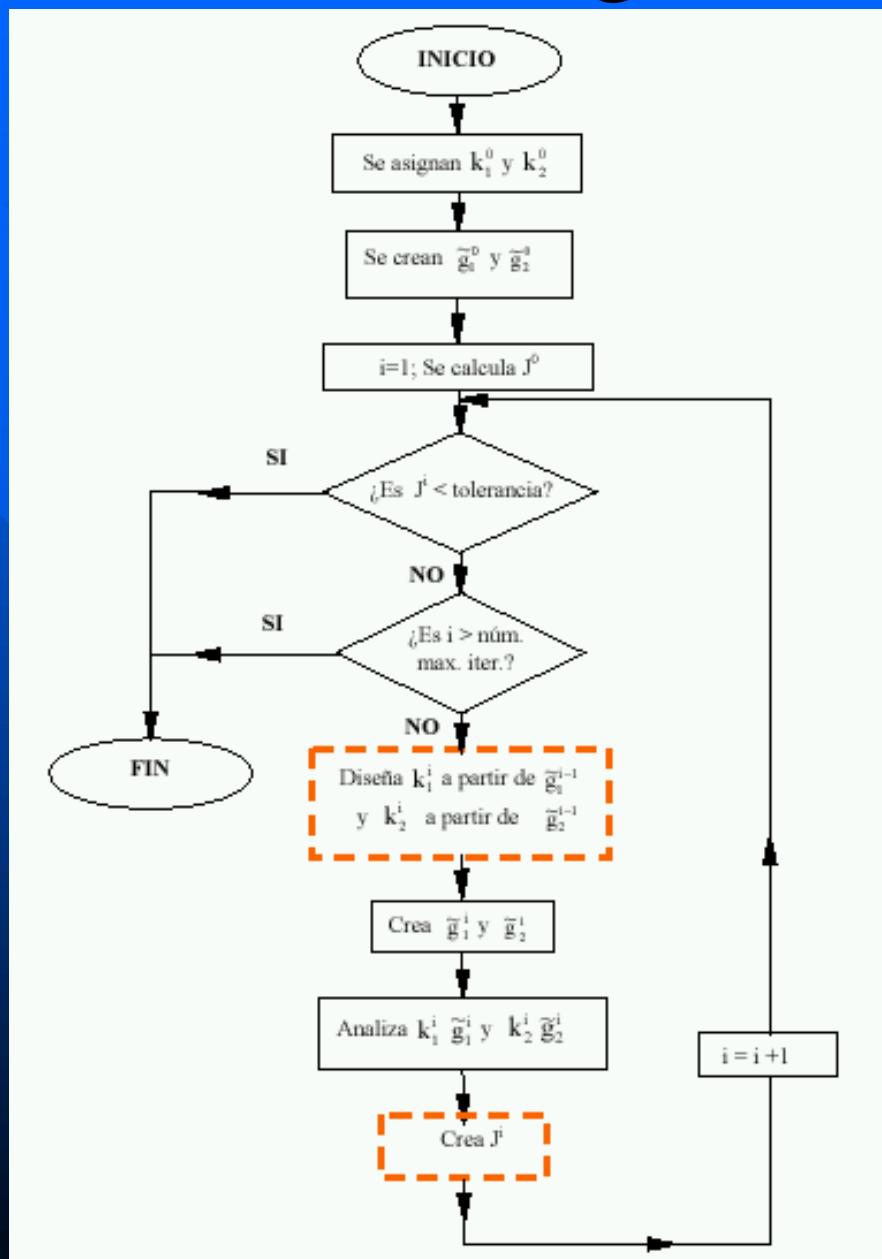
- Todos los elementos de la matriz de funciones de transferencia tienen que ser modelos de primer o segundo orden con retardo.
- Rango limitado de especificaciones
 - $MG \leq 3$
 - $45^\circ \leq MF \leq 90^\circ$
- Ajustes muy conservadores

Fundamentos de la propuesta de Vázquez (2001)

Lazo 1



Núcleo del algoritmo



Características de la propuesta

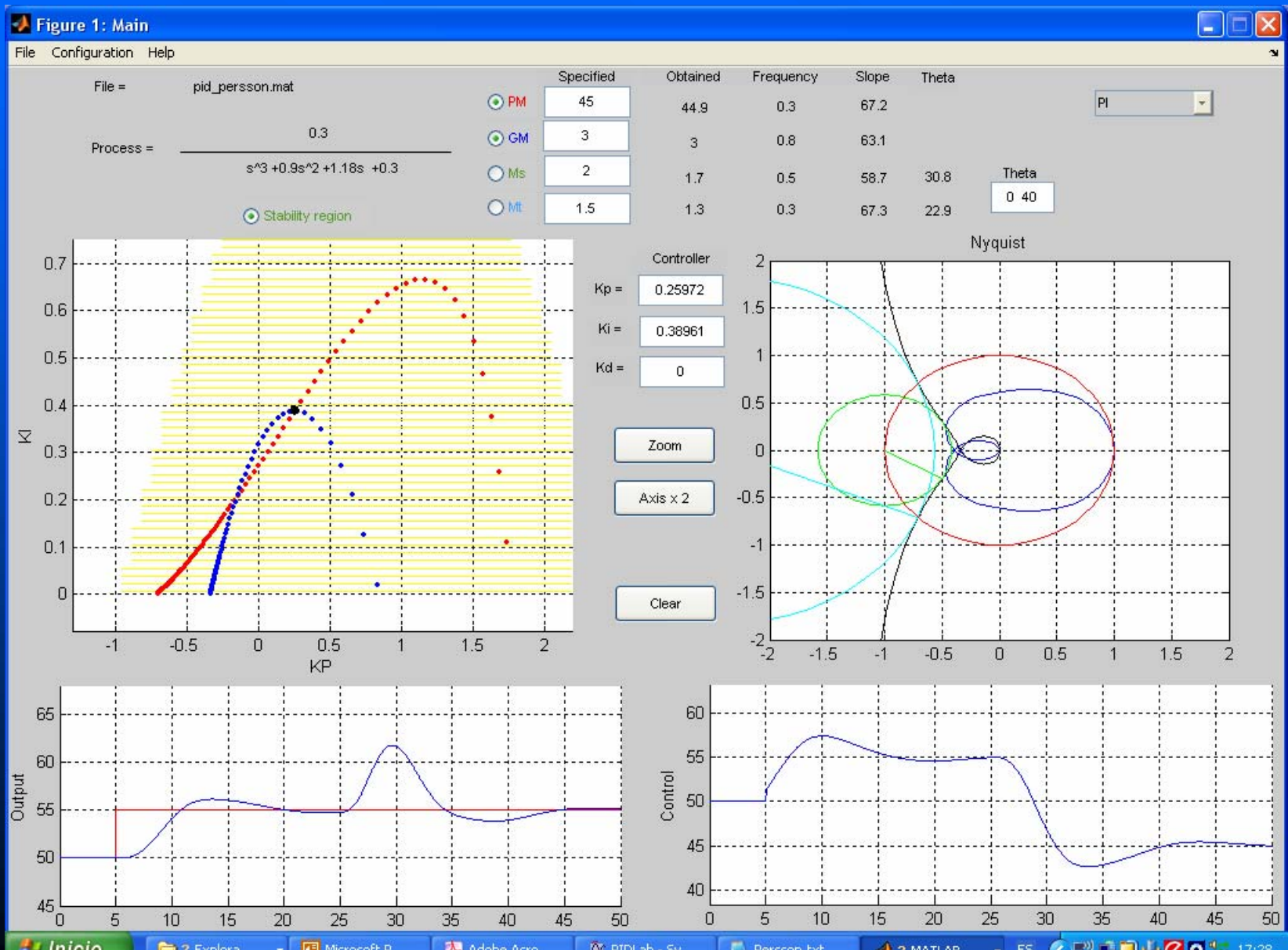
- Iteraciones del caso SISO
 - ¿Cualquier método?
- Opciones (ambos lazos):
 - Ajuste por MF
 - Ajuste por MG
 - Ajuste combinado por MF y MG
- Apoyo informático
 - Herramienta TITO (simulación + análisis + sintonía)

Ejemplo: Paso a paso, con ayuda de PIDGUI

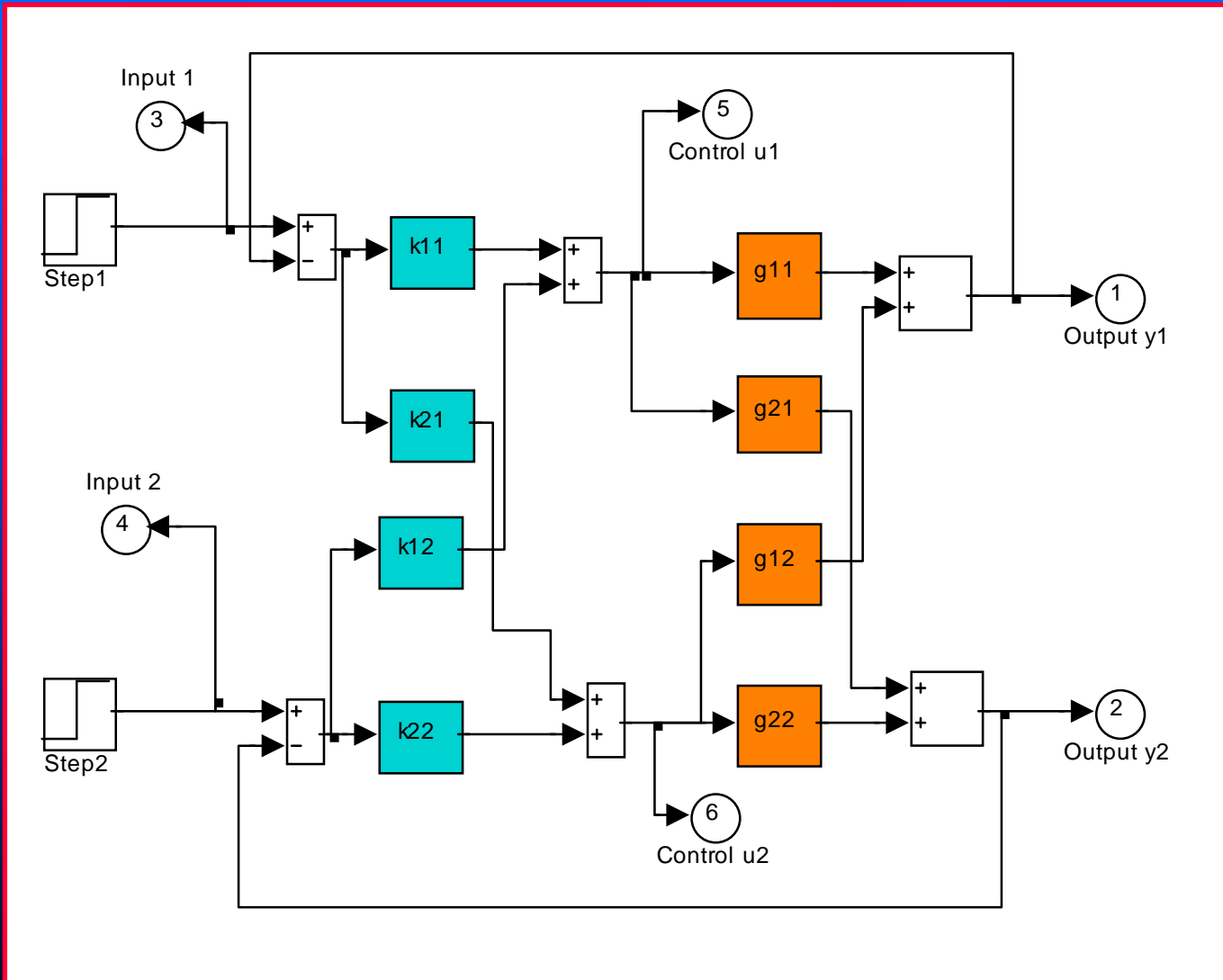
- Formar la matriz de transferencias del proceso
- Ajustar k_1 para g_{11} y k_2 para g_{22} en PIDGUI
- Simular
- Formar g_1 y g_2
- Ajustar k_1 para g_1 y k_2 para g_2 en PIDGUI
- Volver a simular y ajustar de nuevo

Ver como ejemplo el archivo “despropanizadora.m”, el entorno PIDGUI y el modelo “lc_4c.mdl”

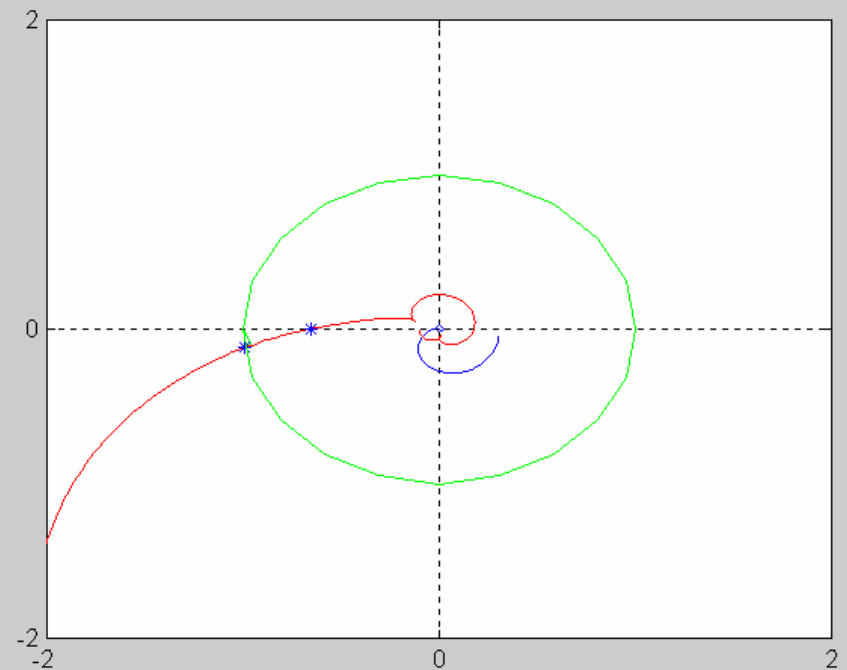
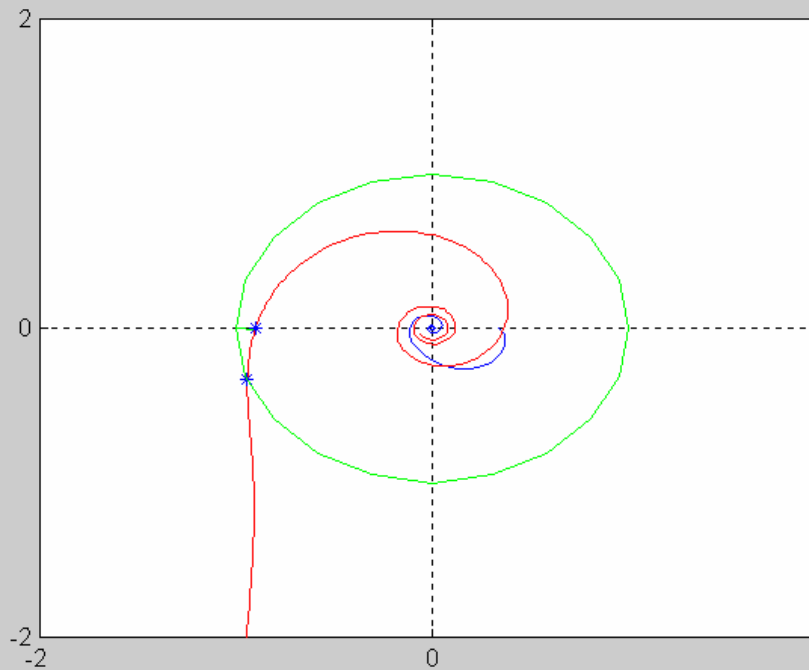
Entorno SISO: PIDGUI



Sistema de control con 4 controladores para proceso 2x2



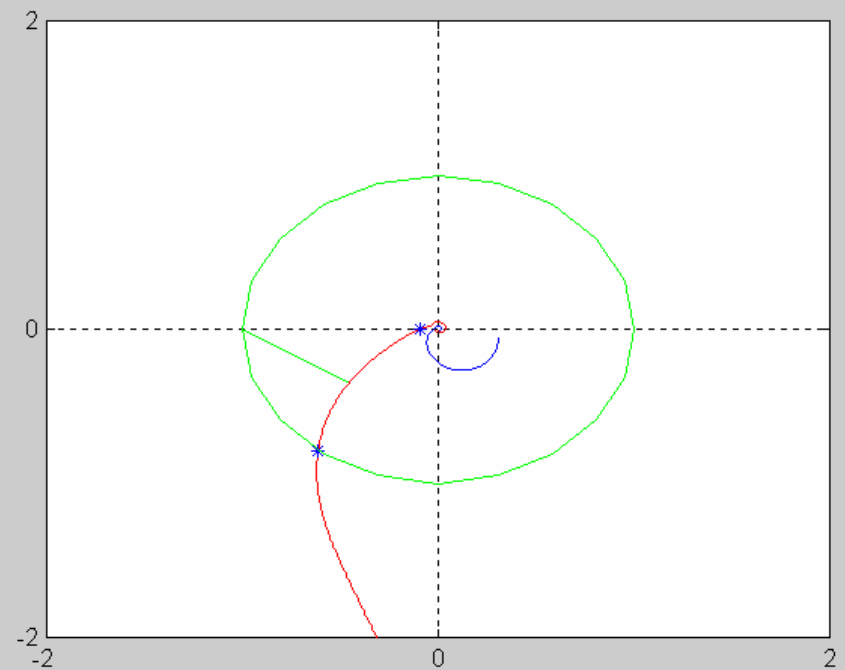
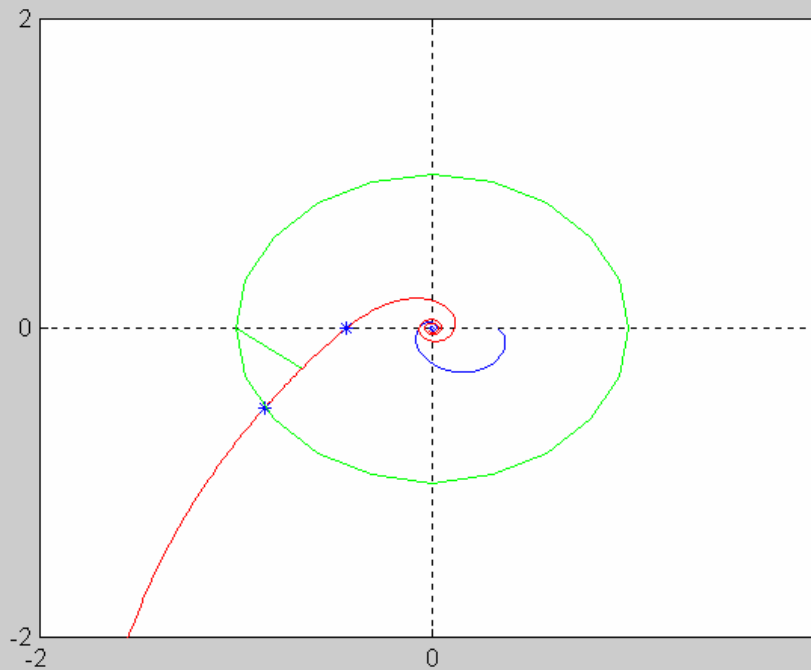
Ejemplo: Ajuste por Margen de Fase



Iteración 1

Especificaciones: MF1=45° MF2 = 60°

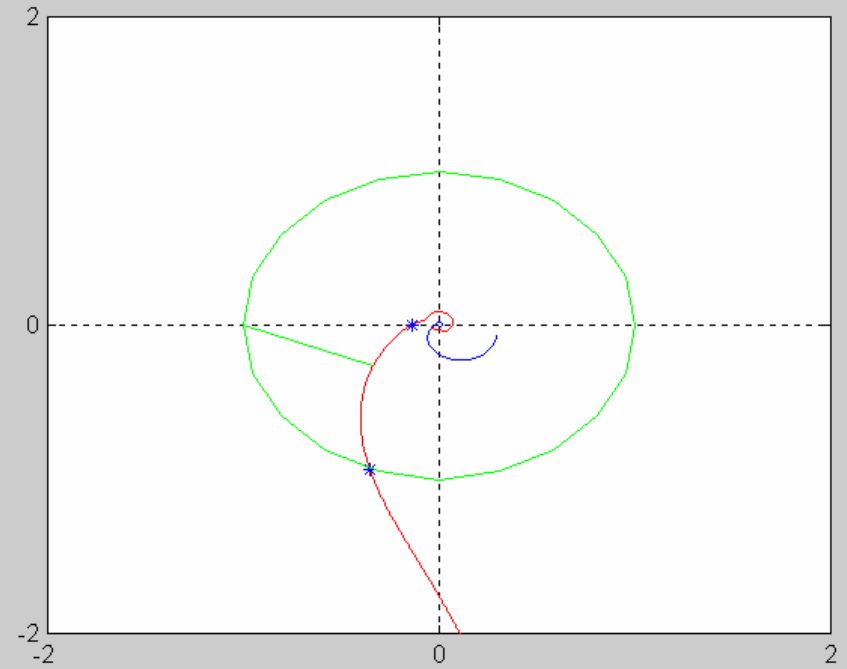
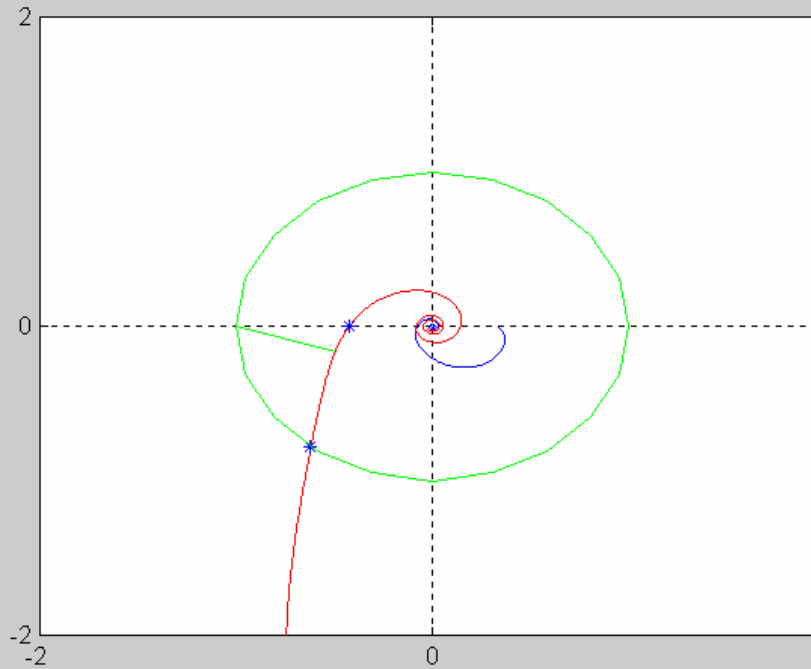
Ejemplo: Ajuste por Margen de Fase



Iteración 2

Especificaciones: MF1=45° MF2 = 60°

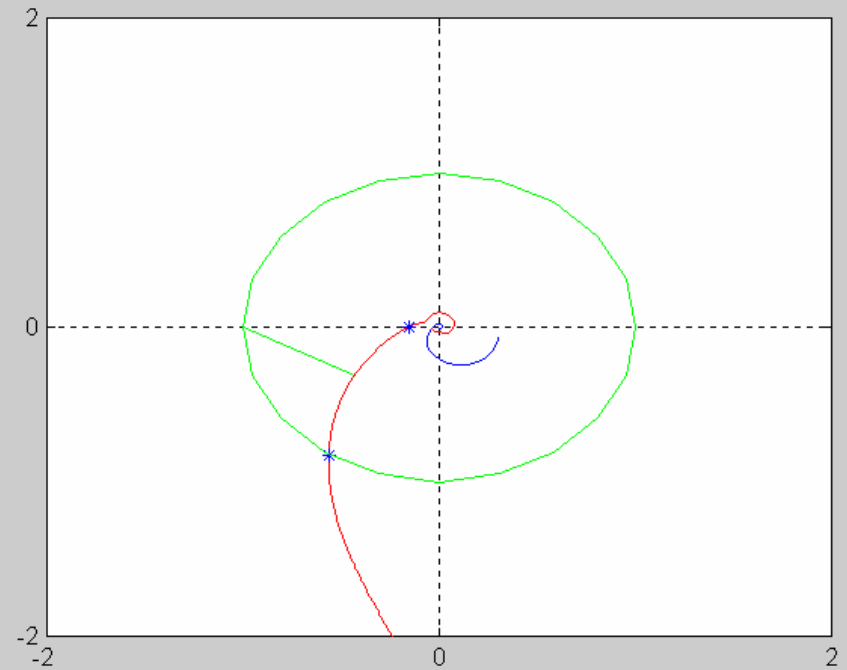
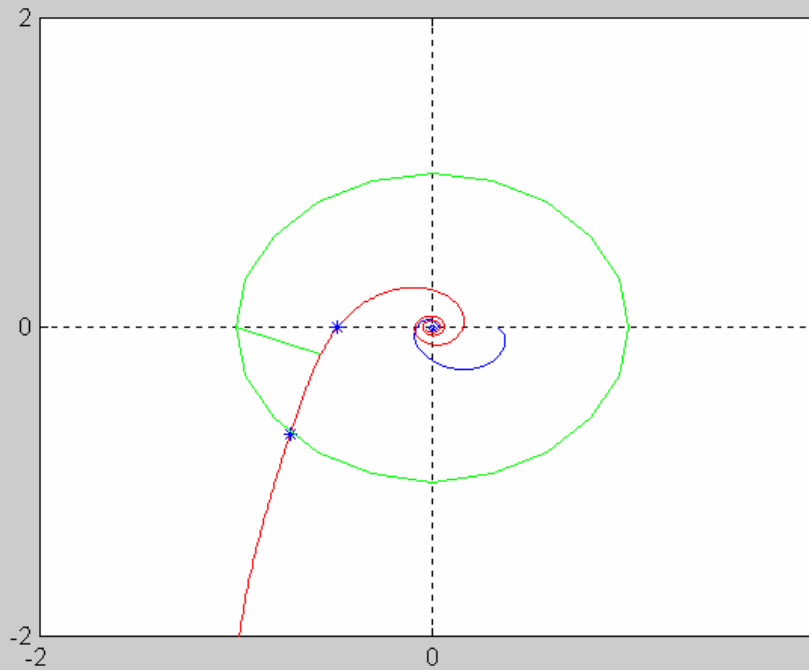
Ejemplo: Ajuste por Margen de Fase



Iteración 3

Especificaciones: MF1=45° MF2 = 60°

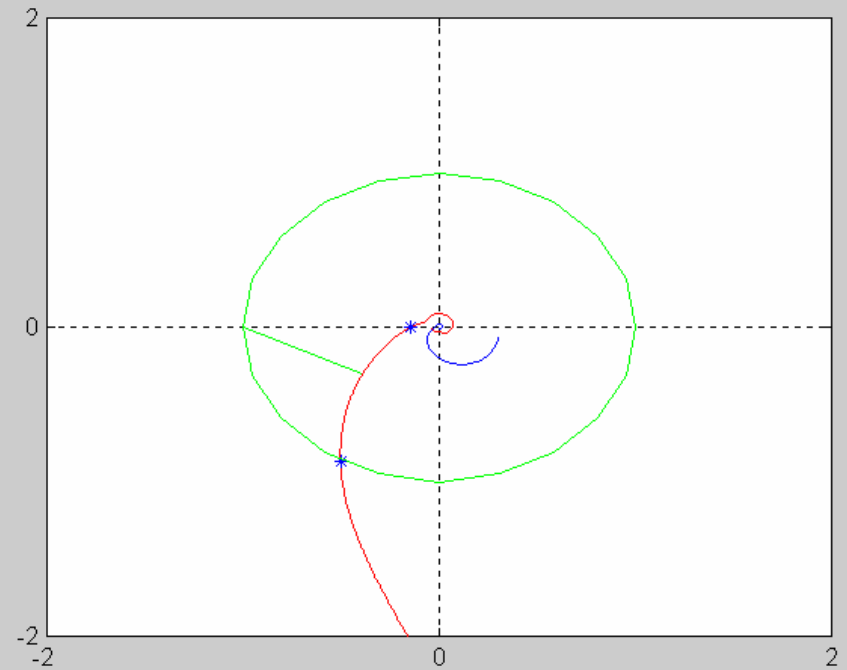
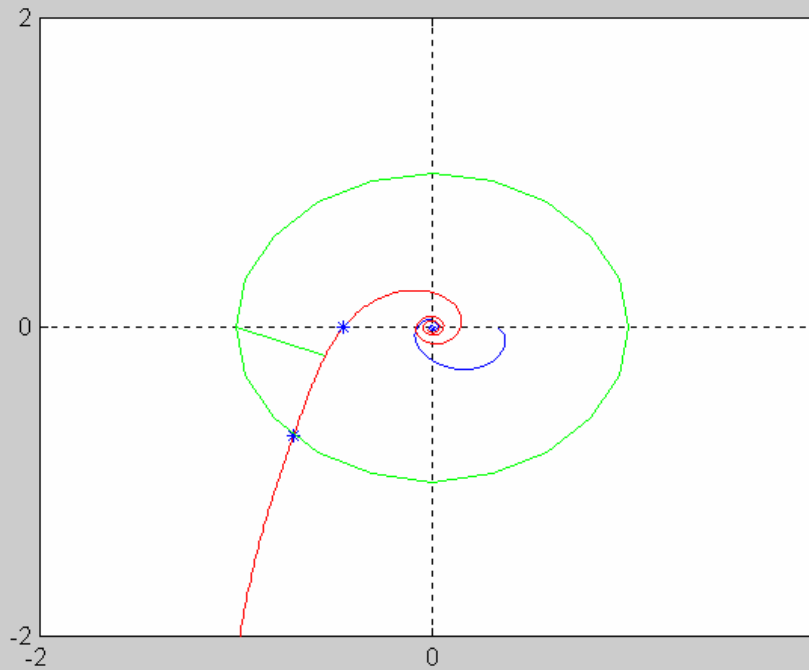
Ejemplo: Ajuste por Margen de Fase



Iteración 4

Especificaciones: MF1=45° MF2 = 60°

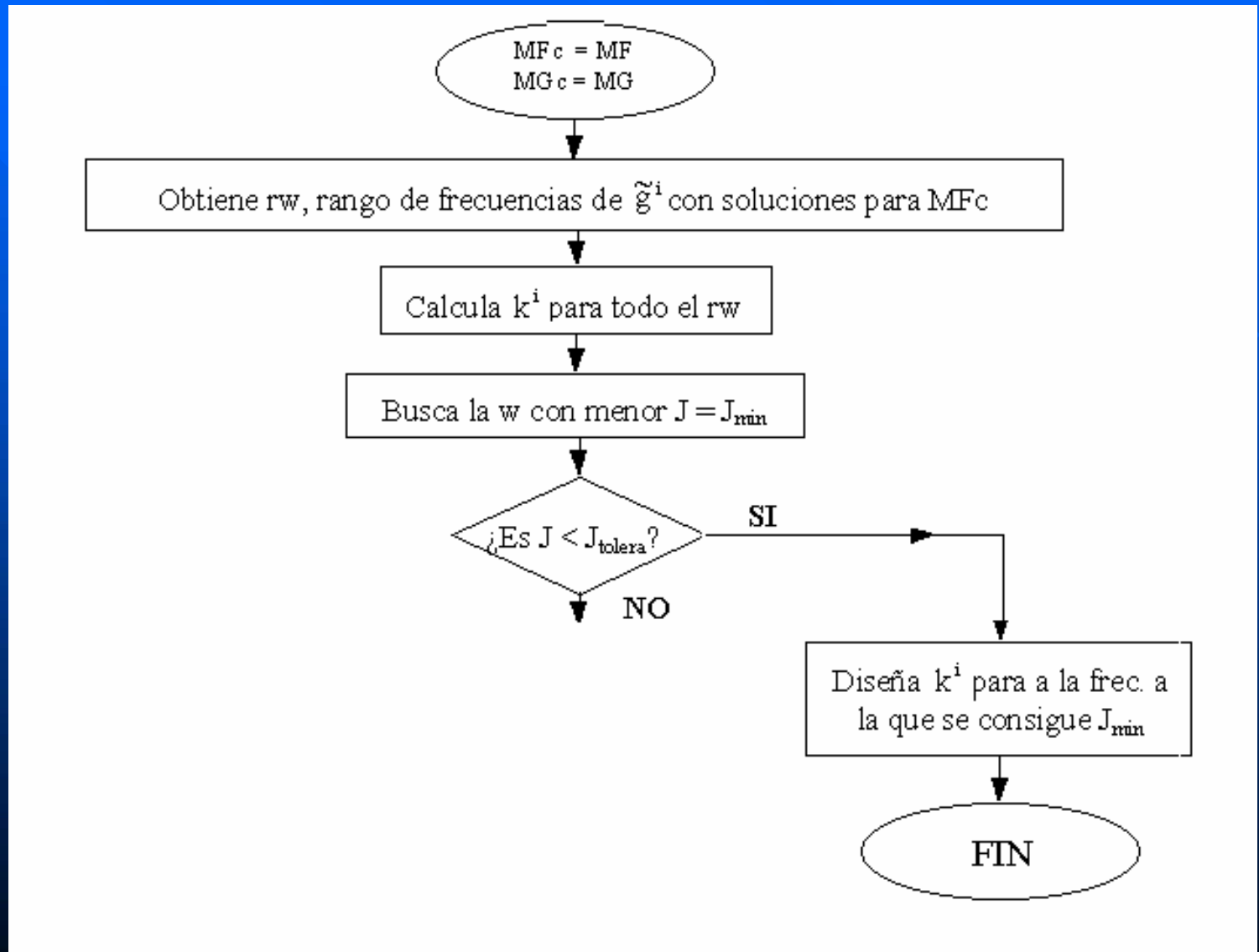
Ejemplo: Ajuste por Margen de Fase



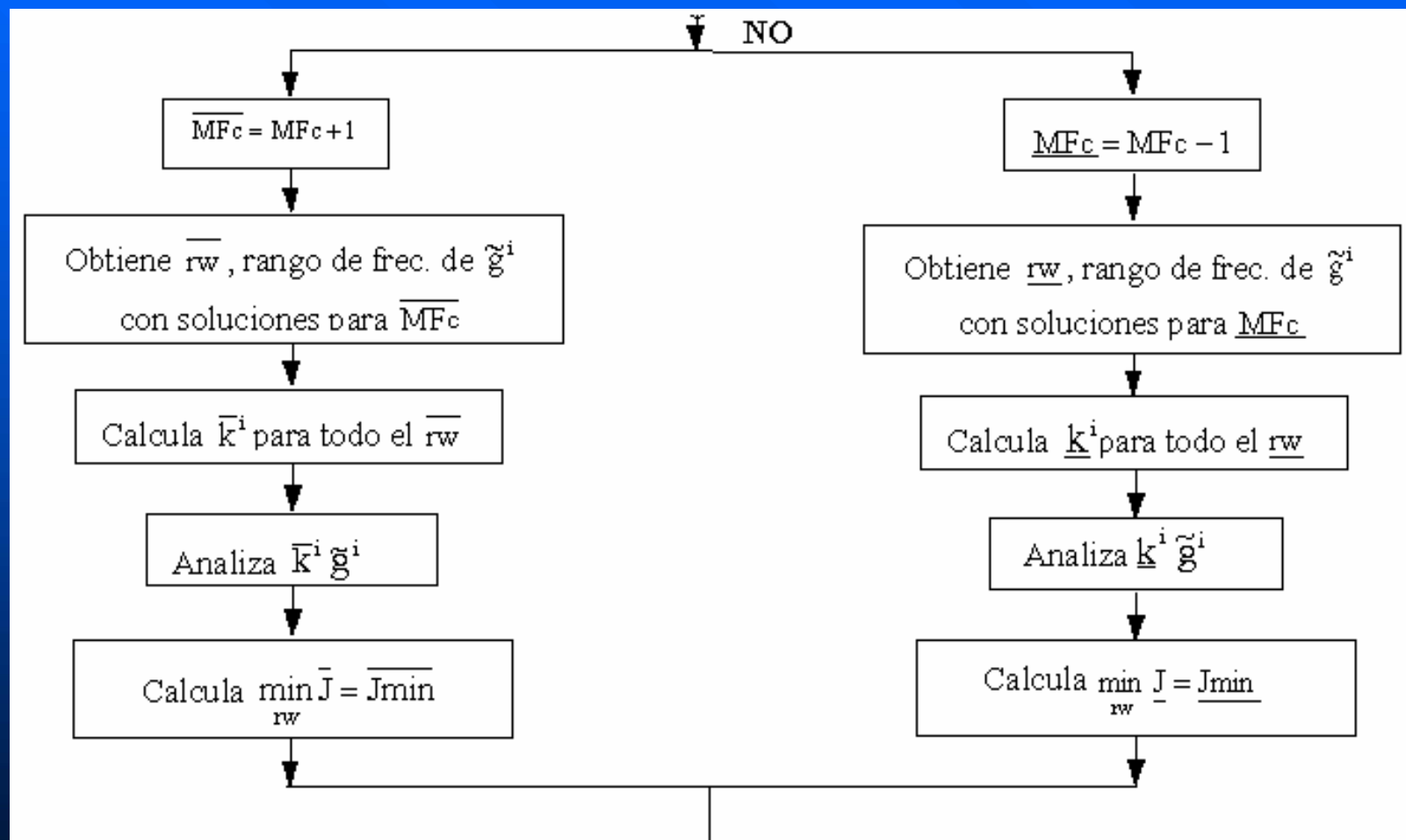
Iteración 5

Especificaciones: MF1=45° MF2 = 60°

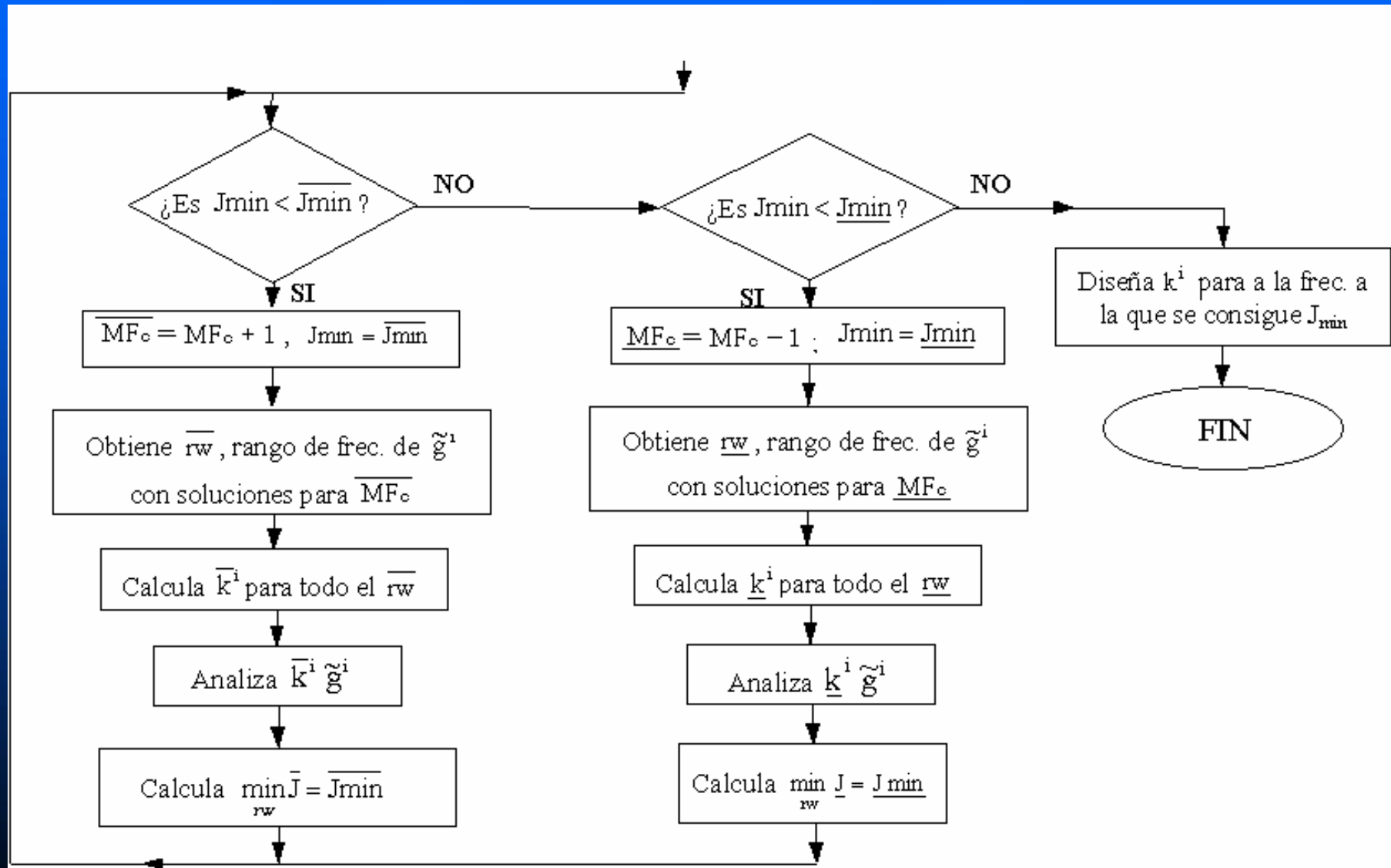
Ajuste combinado



Ajuste combinado



Ajuste combinado



Ejemplos de sintonía

- Sintonía individual
- Sintonía conjunta
- Varias plantas 2x2:
 - Columna despropanizadora
 - Columna de destilación mal condicionada
 - Proceso de intercambio de calor

Intercambio de calor: visto como (3x3)

Lazo N1 - F1:

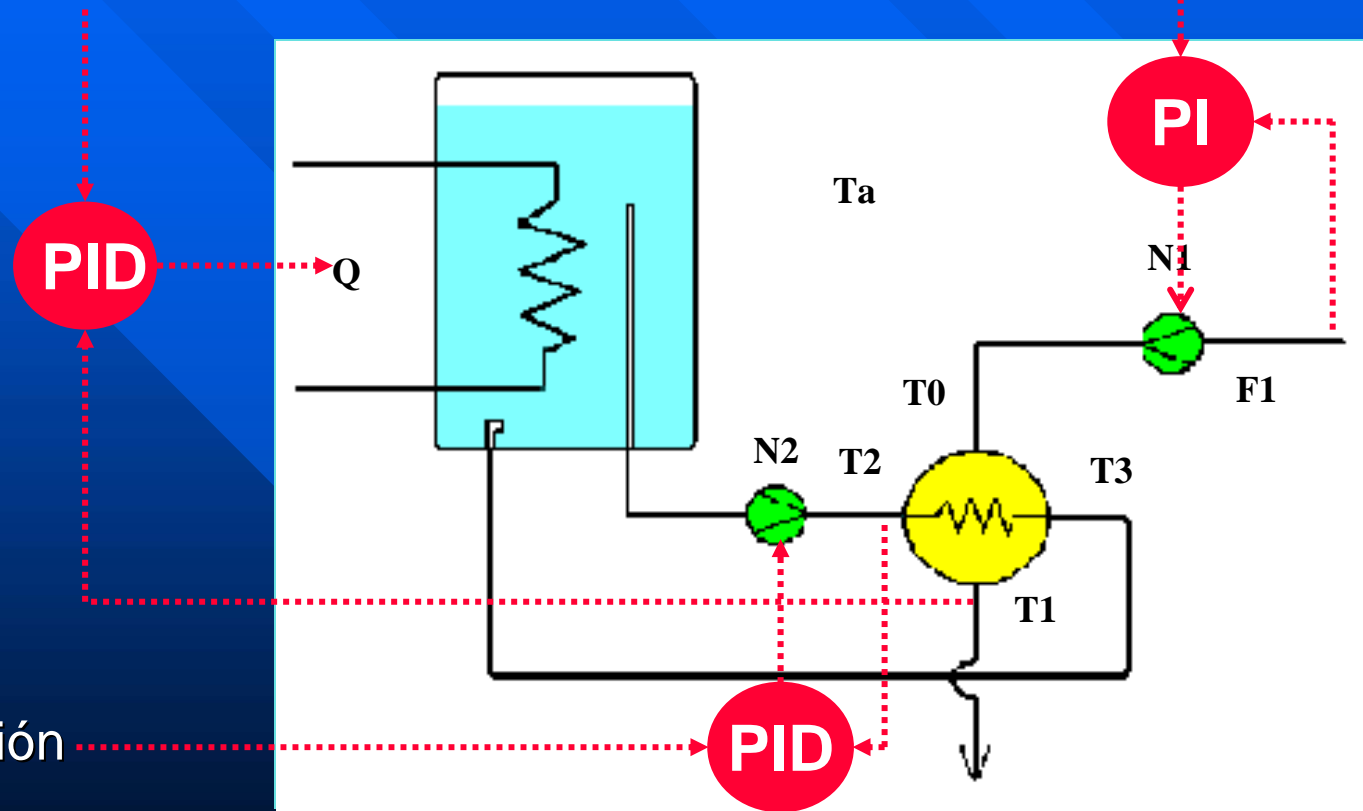
simple, más rápido,
interacciona poco con los otros dos

Lazo Q - T1:

más lento, fuerte interacción
con el lazo N2 - T2

Lazo N2 - T2:

lento, fuerte interacción
con el lazo Q - T1



Modelo del intercambio de calor: visto como 2x2

2 manipuladas:

Q y N2

2 controladas:
T1 y T2

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.28}{638s+1} e^{-200s} & 0.21 \frac{6000s+1}{1400s+1} \\ \frac{0.49}{824s+1} e^{-200s} & \frac{-1.9}{250s+1} e^{-80s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ N_2 \end{pmatrix}$$

RGA

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0.84 & 0.16 \\ 0.16 & 0.84 \end{pmatrix}$$

CONTROL MULTIVARIABLE

Fernando Morilla García – Natividad Duro Carralero

Dpto. de Informática y Automática

fmorilla@dia.uned.es nduro@dia.uned.es

Contenido

- Tema 1: Introducción al control multivariable
- Tema 2 : Medidas de interacción
- Tema 3 : Control descentralizado
- **Tema 4 : Control centralizado**

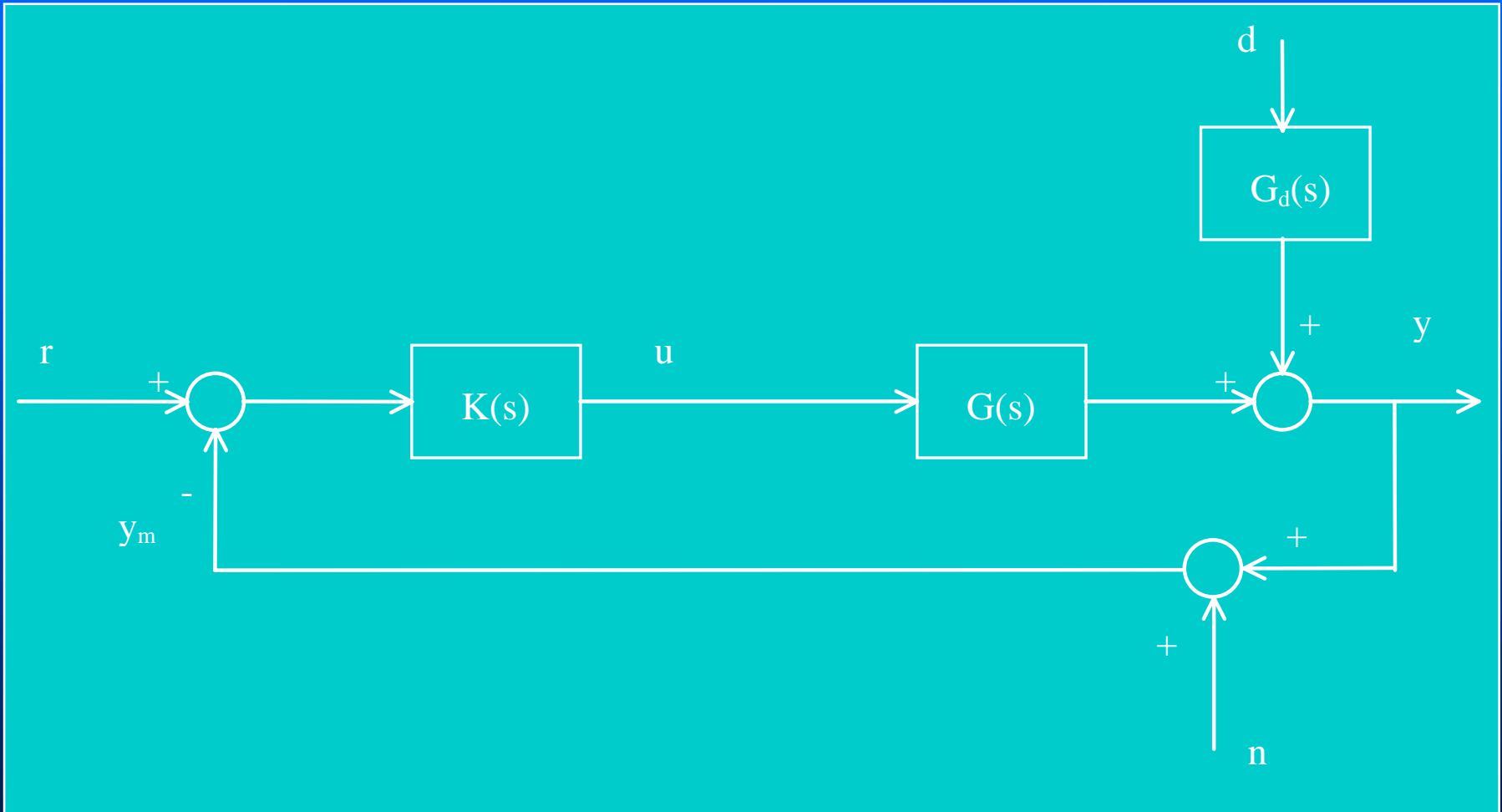
METODOLOGÍA

- Selección de las variables controladas
- Selección de las variables manipuladas
- Selección de la configuración de control
 - **Control Centralizado**
 - Control Descentralizado
- **Selección del tipo de controlador**

Características del control centralizado

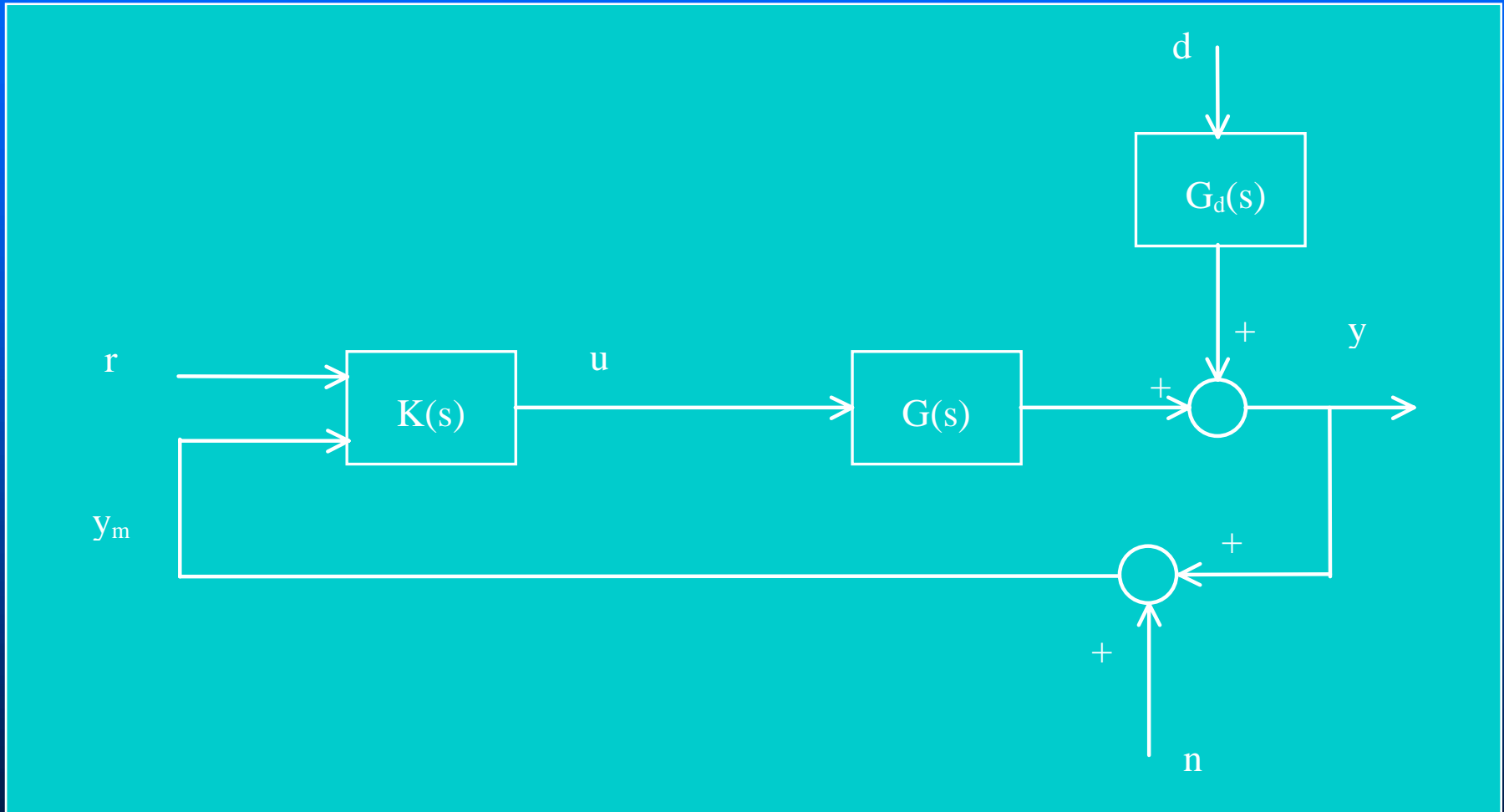
- m variables de salida (variables controladas)
- n variables de entrada (variables manipuladas)
- 1 controlador
- 3 posibles configuraciones
- Diversas técnicas de diseño y de síntesis
 - **Síntesis**: Problema Optimización de una función objetivo
 - **Diseño**: Origen en el caso monovariable

Configuraciones de control centralizado



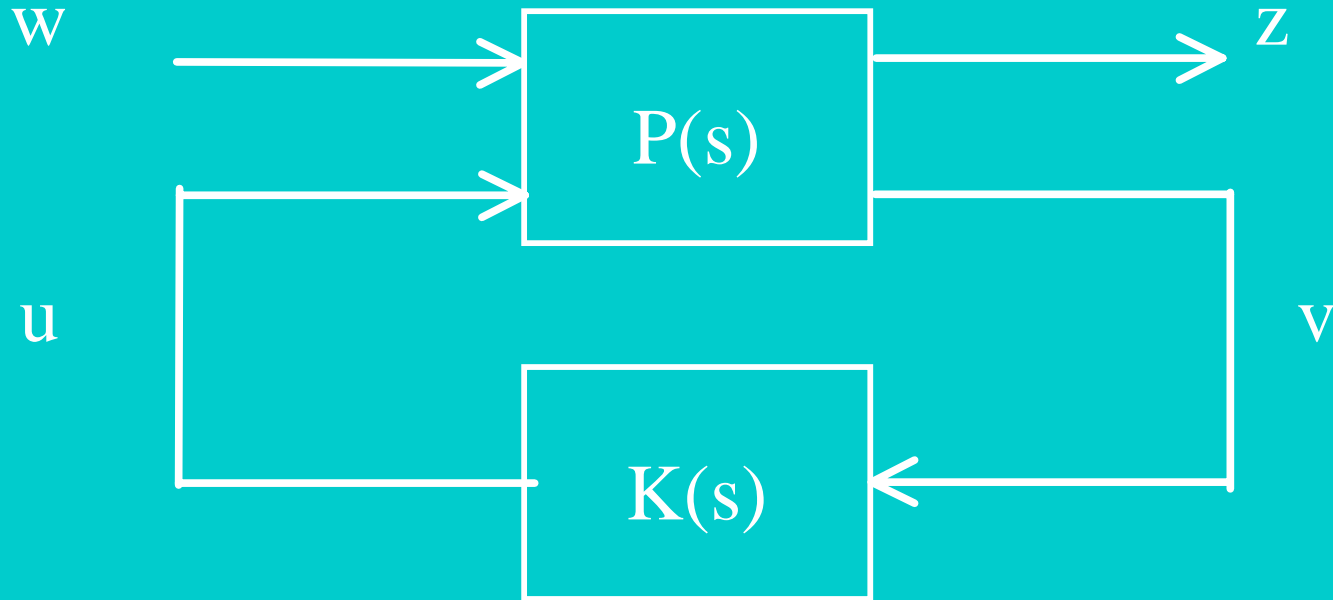
Configuración con un grado de libertad

Configuraciones de control centralizado



Configuración con dos grados de libertad

Configuraciones de control centralizado



Configuración general:

2 anteriores son casos particulares

Diseño y síntesis

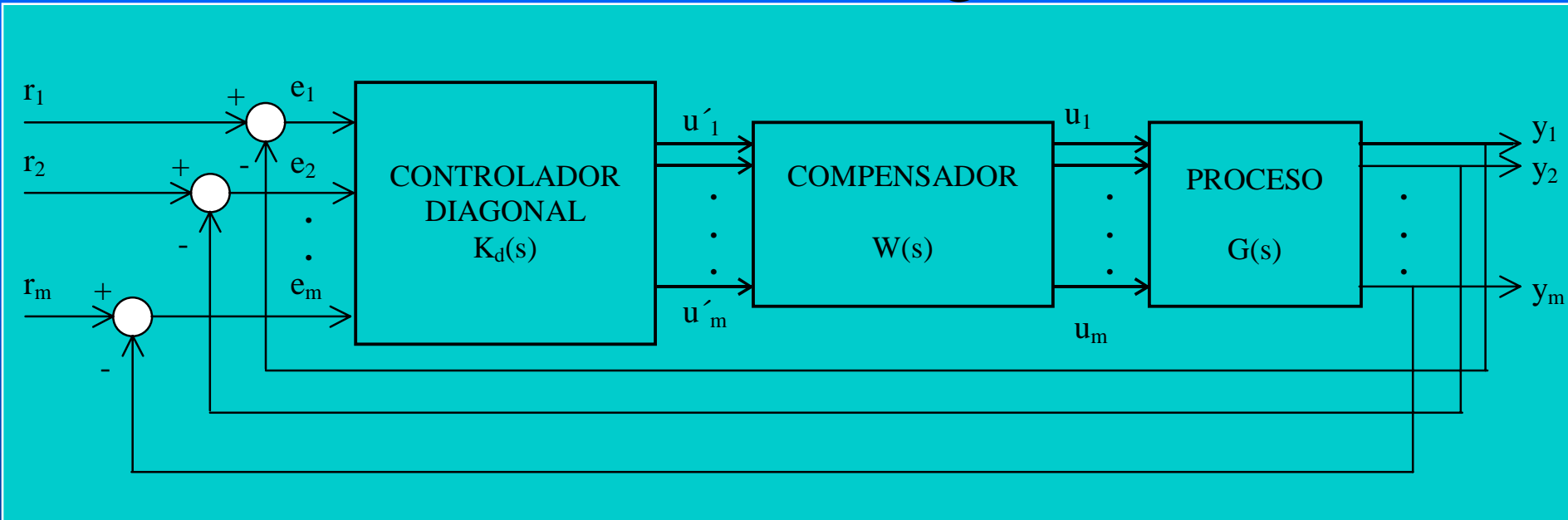
■ Síntesis

- problema global de optimización
- aplicable a cualquier configuración

■ Diseño

- aplicable a la configuración con un grado de libertad
- dos opciones:
 - » Compensador + Controlador diagonal
 - » Desacoplo SVD + Controlador diagonal

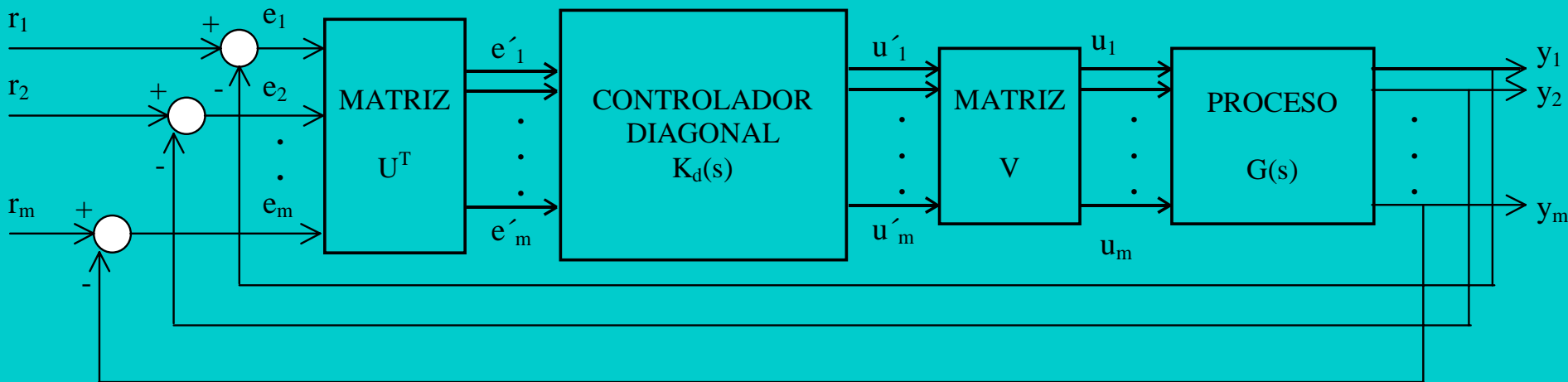
Control mediante compensador y controlador diagonal



■ Skogestad y Postlethwaite (1996):

- Diseño compensador, $W(s)$ facilite el control de $G(s)$
- Diseño $K_d(s)$ para $G'(s) = G(s) W(s)$
- Diseño K final $K(s) = W(s) K_d(s)$

Control mediante desacoplo SVD y controlador diagonal

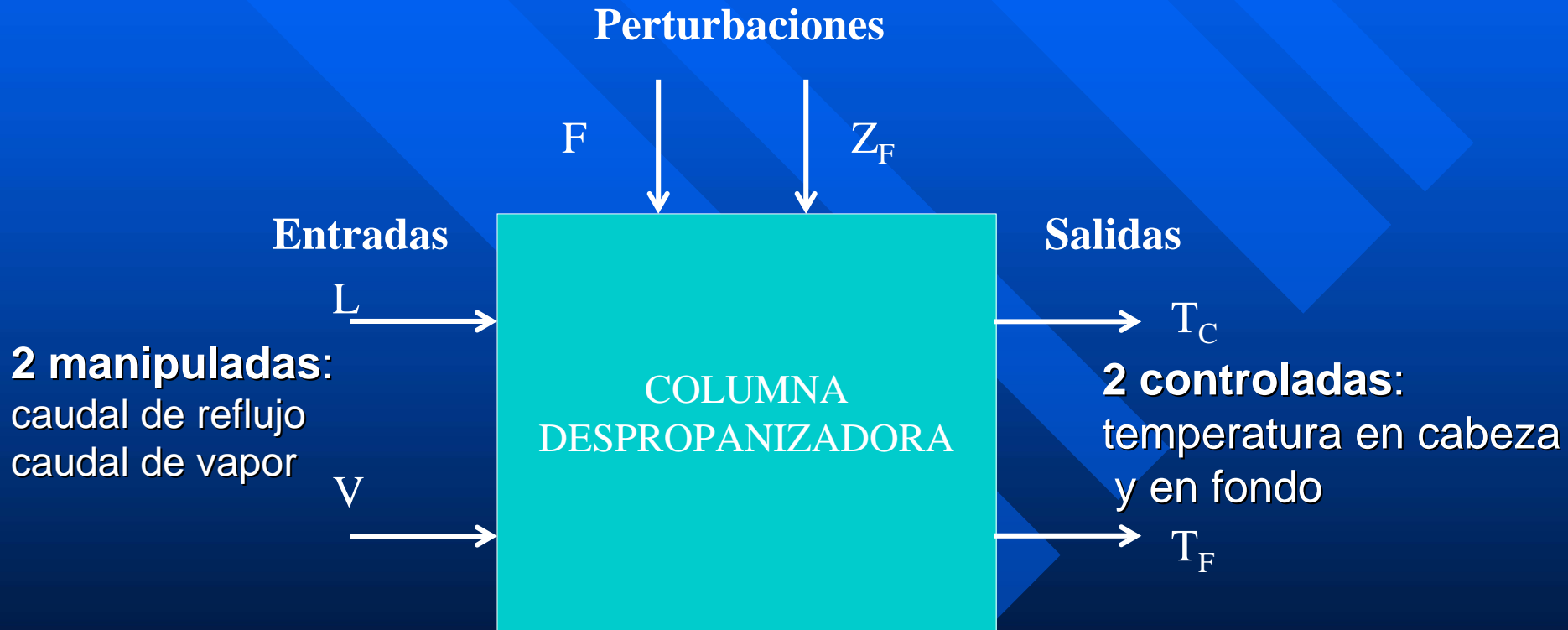


■ Desphande (1989):

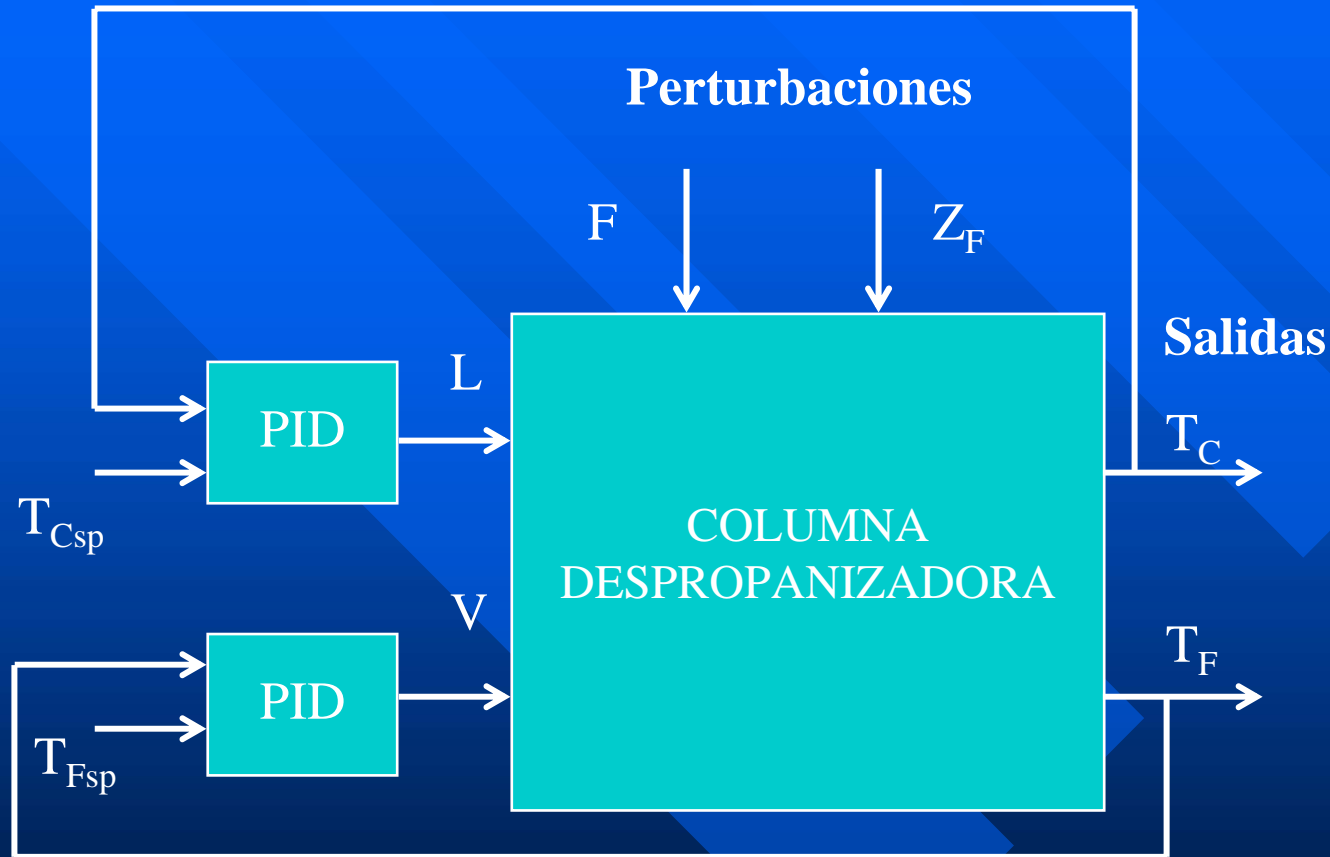
- Descomposición en valores singulares de $G(0) = U\Sigma V^T$
- Diseño $K_d(s)$ para $G'(s) = U^T G(s) V$
- Diseño K final $K(s) = V K_d(s) U^T$

Ejemplo de columna rectificadora

2 perturbaciones:
caudal y composición de alimentación

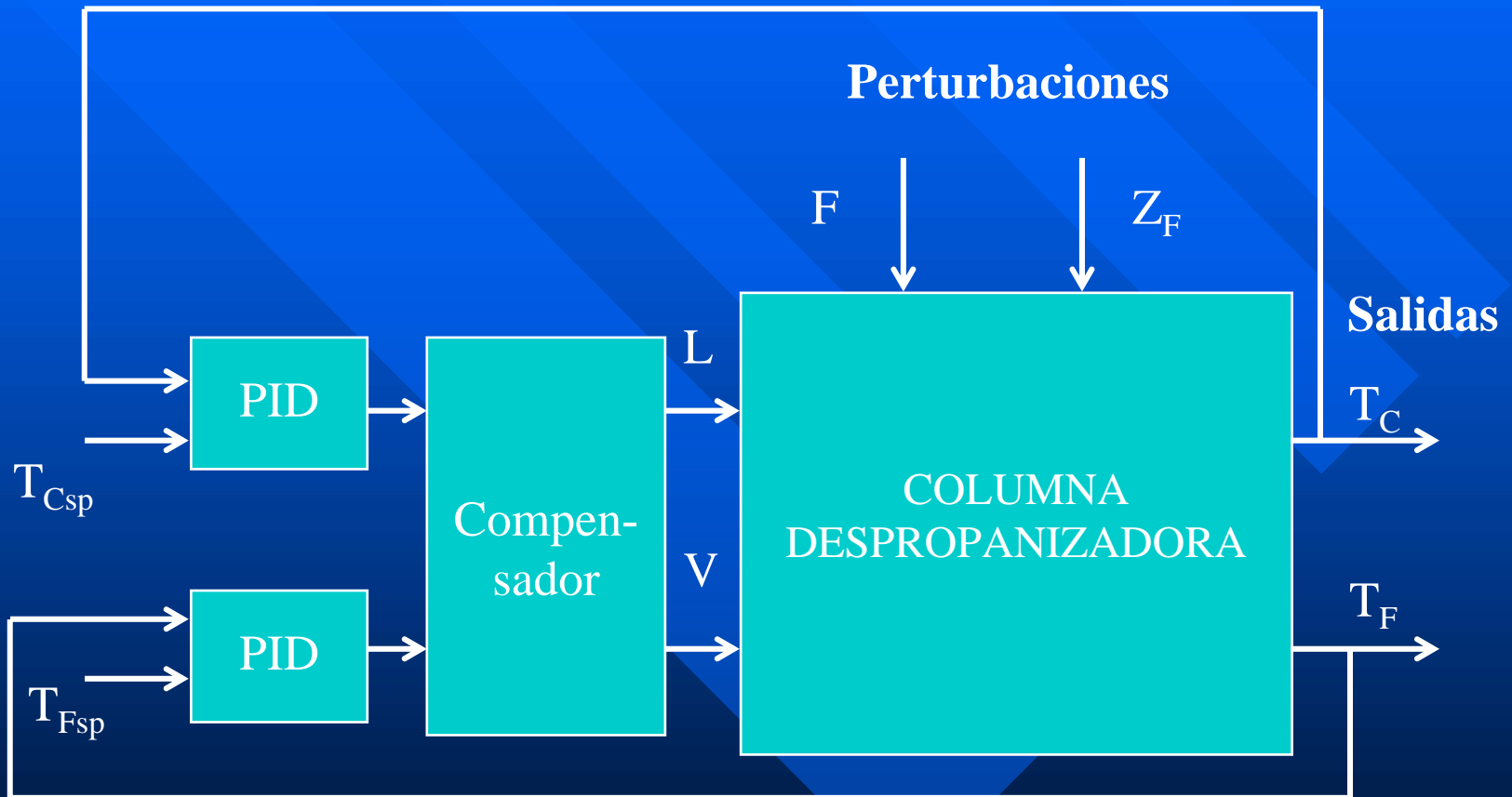


Control descentralizado de la columna rectificadora

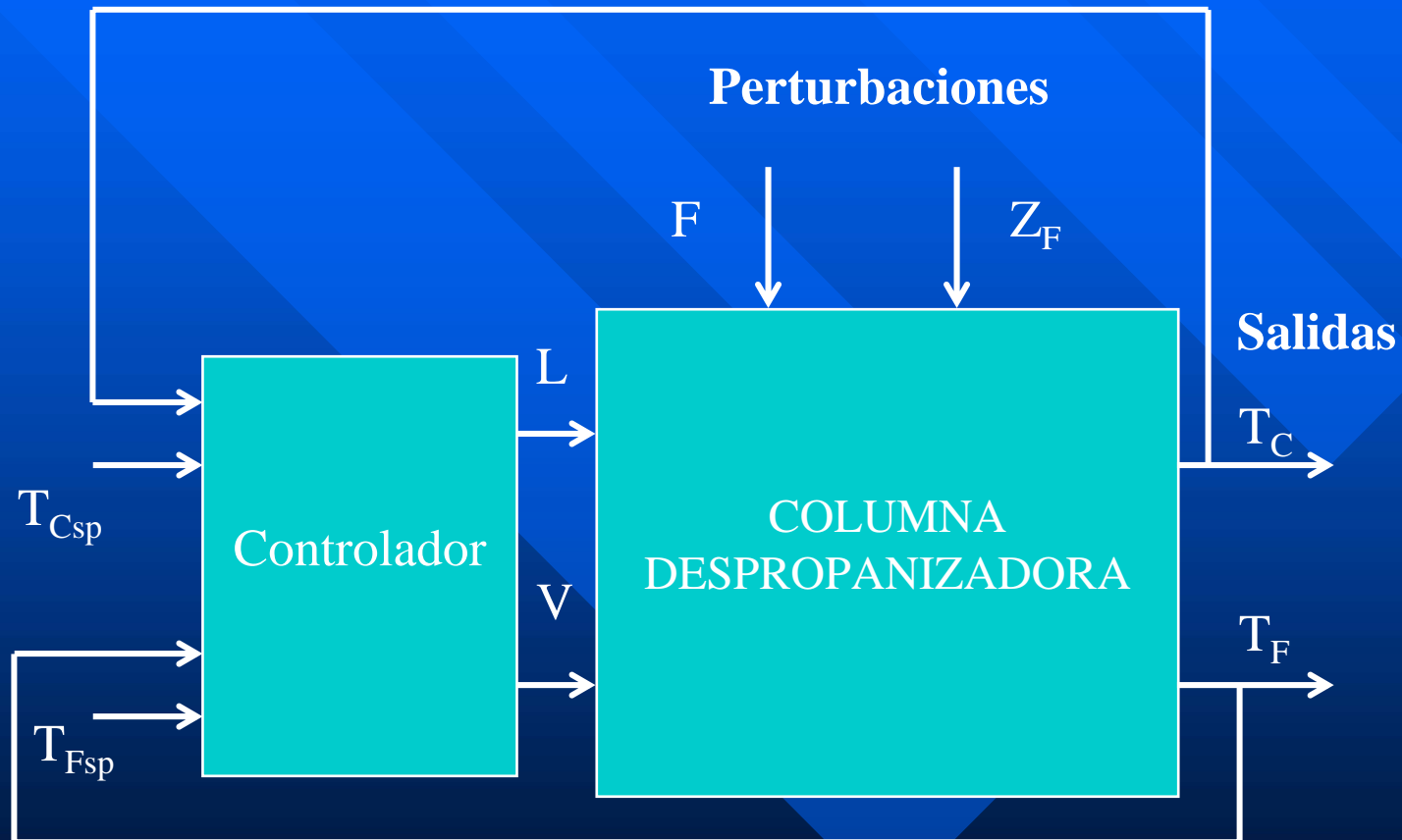


Buenos resultados con ajustes individuales y conjuntos si la columna esta bien condicionada ($\lambda \ll 1$)

Compensación + control descentralizado de la columna rectificadora



Control centralizado de la columna rectificadora



Compensación o Desacoplo

■ Objetivo general:

*Determinar los elementos $w_{ij}(s)$ del compensador $W(s)$ tal que la planta $G(s) W(s)$ presente **menos problemas de interacción** que el proceso original $G(s)$*

– Falta de interacción (RGA = I):

» *Todos los elementos de fuera de la diagonal son nulos.*

» *Todos los elementos por encima o por debajo de la diagonal sean nulos (interacción de una sola vía)*

– Estudio del caso $m \times m$, dado que el diseño de $K_d(s)$ es posterior a la selección de las variables controladas y manipuladas.

Compensación o Desacoplo

- Técnicas con objetivos particulares:
 - **Métodos de Desacoplo** (Objetivo: conseguir una ausencia total de interacción o una presencia parcial de interacción)
 - Procedimiento analítico*
 - Conseguir RGA igual a la matriz identidad*
 - **Dominancia diagonal** (Objetivo: compensación multivariable para conseguir la dominancia diagonal del conjunto formado por el compensador y el proceso)
 - Procedimiento de optimización*
 - Conseguir bandas de Gersghorin muy estrechas*

Tipos de desacoplos

- Cambio de variables:

Buscar un nuevo conjunto de variables manipuladas y de variables controladas

- Desacoplo dinámico

Anular la interacción a todas las frecuencias

- Desacoplo en estado estacionario

Anular la interacción en estado estacionario

- Desacoplo parcial

Eliminar una de las vías de interacción

Ejemplo de desacoplo por cambio de variable

Proceso de mezcla

$$F = m_1 + m_2 \quad ; \quad x = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\Lambda = \begin{matrix} & m_1 & m_2 \\ F & \begin{pmatrix} x & 1-x \end{pmatrix} \\ x & \begin{pmatrix} 1-x & x \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Nuevas variables manipuladas

$$m_1 \quad \mu = m_1 + m_2 = F$$

$$\begin{pmatrix} x \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\mu & -m_1/\mu \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \mu \end{pmatrix}$$



$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Parcialmente Desacoplado (m_1 afecta a x y F , pero μ sólo a F)

Ejemplo de desacoplo por cambio de variable

Nuevas variables manipuladas

$$\mu = m_1 + m_2 \quad ; \quad v = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \mu \end{pmatrix}$$



$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Totalmente Desacoplado (v afecta sólo x y μ sólo a F)

Ejemplo de desacoplo dinámico

Proceso 2 x 2

$$G(s) W(s) = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} g_{11}(s)w_{11}(s) + g_{12}(s)w_{21}(s) & g_{11}(s)w_{12}(s) + g_{12}(s)w_{22}(s) \\ g_{21}(s)w_{11}(s) + g_{22}(s)w_{21}(s) & g_{21}(s)w_{12}(s) + g_{22}(s)w_{22}(s) \end{pmatrix}$$

Se consigue desacoplo dinámico eligiendo adecuadamente $w_{ij}(s)$

$$g_{11}(s)w_{12}(s) + g_{12}(s)w_{22}(s) = 0$$

$$g_{21}(s)w_{11}(s) + g_{22}(s)w_{22}(s) = 0$$

4 incógnitas
2 ecuaciones

Ejemplo de desacoplo dinámico

Proceso
2x2

Se tienen 2
grados de
libertad y
se fijan
 $w_{ii}(s) = 1$

$$\begin{aligned} G(s) W(s) &= \begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w_{12}(s) \\ w_{21}(s) & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} g_{11}(s) + g_{12}(s) w_{21}(s) & g_{11}(s) w_{12}(s) + g_{12}(s) \\ g_{21}(s) + g_{22}(s) w_{21}(s) & g_{21}(s) w_{12}(s) + g_{22}(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} g_{11}(s) - g_{12}(s) \frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)} & 0 \\ 0 & -g_{21}(s) \frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)} + g_{22}(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Compensador
2 bloques unitarios
2 bloques dinámicos

$$w_{21}(s) = -\frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)}$$

$$w_{12}(s) = -\frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)}$$

Ejemplo de desacoplo dinámico

- Otras posibilidades de desacoplo es fijar a 1 dos de los w_{ij} y despejar los otros dos. No tienen porque ser los de la diagonal, como se hacía en el caso anterior.
- También se consigue el desacoplo perfecto eligiendo (Nordfeldt):

$$w_{11}(s) = g_{22}(s) \quad w_{12}(s) = -g_{12}(s) \quad w_{21}(s) = -g_{21}(s) \quad w_{22}(s) = g_{11}(s)$$

Problema: la red resultante presenta la misma complejidad que la matriz de funciones de transferencia del proceso

Punto de partida de una nueva metodología (Nordfeldt) que parte de que la red de desacoplo sólo debe incluir los retardos y la dinámica totalmente imprescindible

Ejemplo de desacoplo estático

$$G(s) W = \begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & w_{12} \\ w_{21} & 1 \end{pmatrix} =$$

Proceso
2 x 2

$$= \begin{pmatrix} g_{11}(s) + g_{12}(s) w_{21} & g_{11}(s) w_{12} + g_{12}(s) \\ g_{21}(s) + g_{22}(s) w_{21} & g_{21}(s) w_{12} + g_{22}(s) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_{11}(s) - g_{12}(s) \frac{g_{21}(0)}{g_{22}(0)} & -g_{11}(s) \frac{g_{12}(0)}{g_{11}(0)} + g_{12}(s) \\ g_{21}(s) - g_{22}(s) \frac{g_{21}(0)}{g_{22}(0)} & -g_{21}(s) \frac{g_{12}(0)}{g_{11}(0)} + g_{22}(s) \end{pmatrix}$$

Compensador
2 bloques unitarios
2 bloques ganancias

$$w_{21} = - \frac{g_{21}(0)}{g_{22}(0)}$$

$$w_{12}(s) = - \frac{g_{12}(0)}{g_{11}(0)}$$

Ejemplo de desacoplo estático

- Siguiendo la idea de Nordfeldt:

$$w_{11} = g_{22}(0) \quad w_{12} = -g_{12}(0) \quad w_{21} = -g_{21}(0) \quad w_{22} = g_{11}(0)$$

- Metodología incluida en TITO, tanto en dinámico como en estacionario.
 - Con el fin de conseguir normalización, se incorpora un reajuste de las ganancias de la red de desacoplo para que el elemento 11 de $G(s)W(s)$ tenga ganancia 1 en estado estacionario

Problemas del Desacoplo

- Desacoplo es muy sensible a los errores de modelado y a las incertidumbres. Se debe avanzar en técnicas de desacoplo robusto.
- No garantiza un buen rechazo a las perturbaciones. Para conseguir un buen compromiso entre consignas y perturbaciones se debe acudir a la estructura con dos grados de libertad.
- A los ceros de transmisión del proceso se le suman los del compensador.
- No permite tratar sistemas con retardos.

Desacoplos para la columna despropanizadora

$$G(s) = \begin{pmatrix} \frac{2.6}{(23.7s+1)(11.8s+1)} & \frac{1}{(17.9s+1)^2} \\ \frac{0.57}{(19.7s+1)(9.3s+1)} & \frac{2}{(24.3s+1)(8.1s+1)} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{11} = 1.1231$$

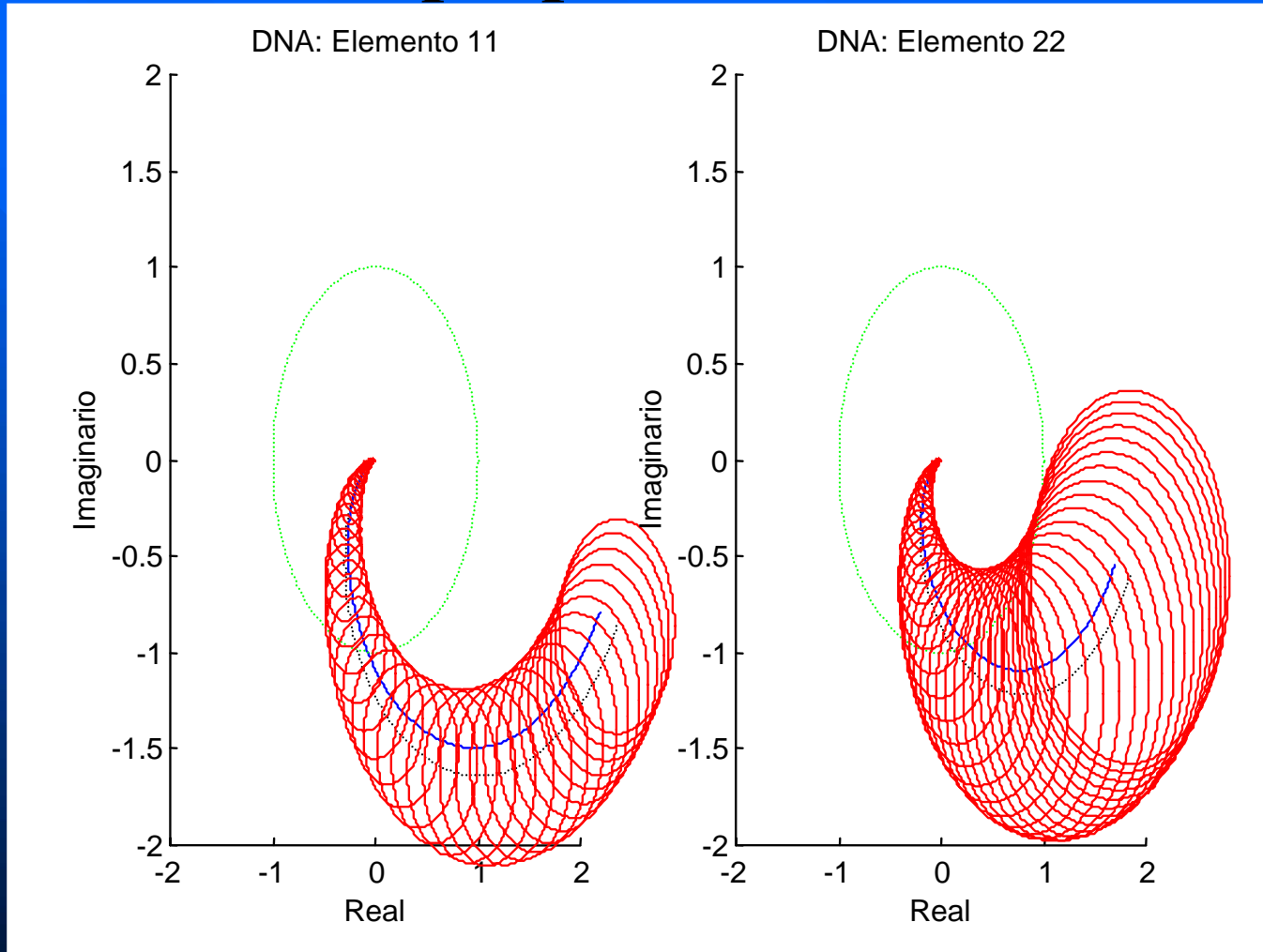
Buenos resultados con control descentralizado, poca interacción

	Desacoplo dinámico	Desacoplo estacionario
$W_{21}(s)$	$\frac{112.2s^2 + 18.47s + 0.57}{366.4s^2 + 58s + 2}$	0.2850
$W_{12}(s)$	$\frac{279.7s^2 + 35.5s + 1}{833.1s^2 + 93.08s + 2.6}$	0.3846

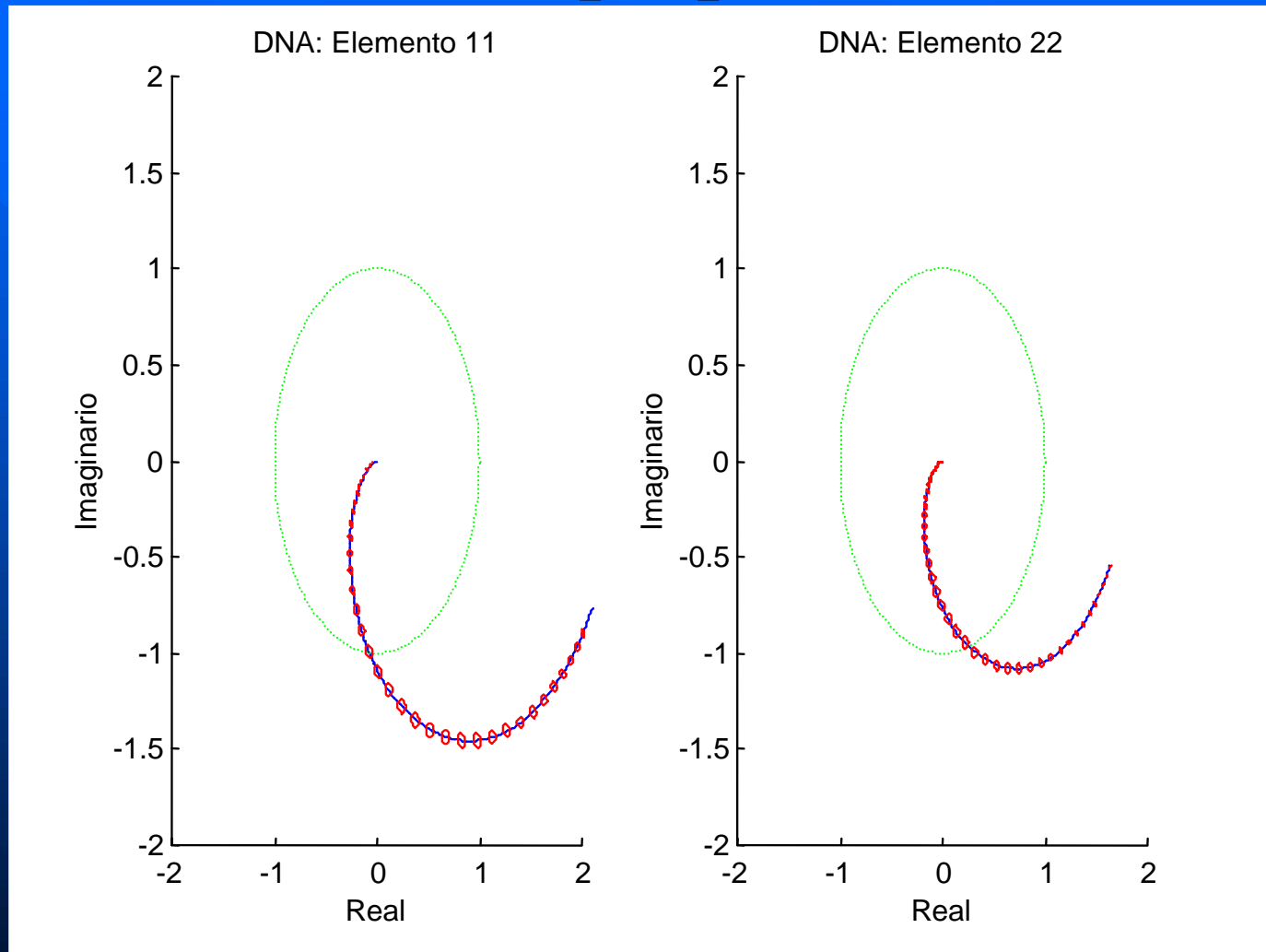
Desacoplos para la columna despropanizadora

- Conjunto Compensador + Proceso $G(s)W(s)$ en ambos casos presenta $RGA = I$.
 - Con desacoplo dinámico, porque los elementos de fuera de la diagonal son nulos.
 - Con desacoplo estático, porque las ganancias en estado estacionario de los elementos de fuera de la diagonal son nulos.
 - Si la columna ya se podía controlar con 2 PID, mucho más fácil se controlará después de utilizar desacoplo dinámico o estático.

DNA del modelo de columna despropanizadora



DNA del compensador estático+ modelo de columna despropanizadora



Prueba de los desacoplos dinámico y estáticos de la columna en TITO

- Usando la metodología de Nordfeldt:
 - Como no existen retardos, ni ceros y polos comunes entre los elementos de la misma fila de $G(s)$, los resultados sólo incluyen un ajuste de ganancias respecto a la otra solución

	Desacoplo dinámico	Desacoplo estacionario
$w_{11}(s)$	$\frac{-0.002358}{1.074 s^2 + 0.1768 s + 0.005458}$	-0.432
$w_{12}(s)$	$\frac{0.0006741}{s^2 + 0.1117 s + 0.003121}$	0.216
$w_{21}(s)$	$\frac{-0.000672}{s^2 + 0.1583 s + 0.005458}$	-0.1231
$w_{22}(s)$	$\frac{0.001753}{0.8728 s^2 + 0.1108 s + 0.003121}$	0.5616

Desacoplos para la columna mal condicionada

$$G(s) = \frac{1}{75s + 1} \begin{pmatrix} 0.878 & -0.864 \\ 1.082 & -1.096 \end{pmatrix}$$

$$RGA = \begin{pmatrix} 35.1 & -34.1 \\ -34.1 & 35.1 \end{pmatrix}$$

Malos resultados con control descentralizado, mucha interacción

	Desacoplo dinámico	Desacoplo estacionario
$W_{21}(s)$	$\frac{81.5s + 1.082}{82.2s + 1.096}$	0.9872
$W_{12}(s)$	$\frac{64.8s + 0.864}{65.85s + 0.878}$	0.9841

Conjunto compensador + proceso $G(s)W(s) \rightarrow RGA = I$

Desaparece la interacción con ambos compensadores

Desacoplos estacionarios parciales para la columna mal condicionada

$$G(s) = \frac{1}{75s+1} \begin{pmatrix} 0.878 & -0.864 \\ 1.082 & -1.096 \end{pmatrix}$$

$$RGA = \begin{pmatrix} 35.1 & -34.1 \\ -34.1 & 35.1 \end{pmatrix}$$

Desacoplo parcial en lugar de total → Desaparece una vía de interacción

$$w_{21} = 0 \quad ; \quad w_{12}(s) = 0.9841$$

$$w_{21} = 0.9872 \quad ; \quad w_{12}(s) = 0$$



$$G(s) W(s) = \begin{pmatrix} \frac{0.878}{75s+1} & 0 \\ \frac{1.082}{75s+1} & \frac{-2.344s - 0.03125}{5625s^2 + 150s + 1} \end{pmatrix}$$

$$G(s) W(s) = \begin{pmatrix} \frac{1878s + 0.02504}{5625s^2 + 150s + 1} & \frac{-0.864}{75s+1} \\ 0 & \frac{-1.096}{75s+1} \end{pmatrix}$$

Desacoplos estacionario con Nordfeldt para la columna mal condicionada

$w_{11}(s)$	39.94
$w_{12}(s)$	-31.49
$w_{21}(s)$	39.43
$w_{22}(s)$	-32

Red obtenida es estática, dado que no se necesita dinámica para desacoplar la dinámica del proceso puesto que viene determinada por un denominador común a todos los elementos del modelo del proceso.

EL DESACOPLO SIGUE FUNCIONANDO ADECUADAMENTE

Desacoplos para el intercambiador de calor

- Sistema con poca interacción $\lambda = 0.84$ y retardos en tres de las cuatro funciones de transferencia del proceso:
 - Con el procedimiento de desacoplo dinámico con $w_{11}(s) = w_{22}(s) = 1$ no funciona debido a los retardos.
 - Con Nordfeldt obtenemos una solución para el desacoplo dinámico, que reduce bastante la interacción proceso.
 - Como ya era posible controlar el proceso con 2 PID descentralizados, mucho más fácil será ahora después de la compensación dinámica.
 - Con desacoplo estático el resultado es mucho peor.

Control Centralizado por Desacoplo

- Controlador multivariable $K(s)$ se puede calcular:
 - De forma directa por desacoplo
 - Diseñando previamente un controlador diagonal $K_d(s)$ tal que $K(s) = W(s) K_d(s)$

$$K(s) = \begin{pmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) \\ k_{21}(s) & k_{22}(s) \end{pmatrix}$$

$$W(s) K_d(s) = \begin{pmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1(s) & 0 \\ 0 & k_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11}(s) k_1(s) & w_{12}(s) k_2(s) \\ w_{21}(s) k_1(s) & w_{22}(s) k_2(s) \end{pmatrix}$$

Control Centralizado por Desacoplo

$$\begin{aligned} G(s) W(s) &= \begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{11}(s) & w_{12}(s) \\ w_{21}(s) & w_{22}(s) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} g_{11}(s) w_{11}(s) + g_{12}(s) w_{21}(s) & g_{11}(s) w_{12}(s) + g_{12}(s) w_{22}(s) \\ g_{21}(s) w_{11}(s) + g_{22}(s) w_{21}(s) & g_{21}(s) w_{12}(s) + g_{22}(s) w_{22}(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$K(s) = \begin{pmatrix} k_1(s) & -\frac{g_{12}(s)}{g_{11}(s)} k_2(s) \\ -\frac{g_{21}(s)}{g_{22}(s)} k_1(s) & k_2(s) \end{pmatrix}$$

Control Centralizado por Desacoplo

- k_1 y k_2 se diseñan con técnicas monovariables para sus respectivas funciones g_1 y g_2 , que guardan la siguiente relación con los elementos de las funciones del proceso

$$G(s) W(s) = \begin{pmatrix} g_{11}(s) - \frac{g_{12}(s) g_{21}(s)}{g_{22}(s)} & 0 \\ 0 & g_{22}(s) - \frac{g_{12}(s) g_{21}(s)}{g_{11}(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(s) & 0 \\ 0 & g_2(s) \end{pmatrix}$$

Control Centralizado por Desacoplo

■ Resumiendo:

- Ajustar $k_1(s)$ para la función de transferencia
$$g_{11}(s) = -(g_{12}(s)g_{21}(s))/g_{22}(s)$$
- Ajustar $k_2(s)$ para la función de transferencia
$$g_{22}(s) = -(g_{12}(s)g_{21}(s))/g_{11}(s)$$
- Asignar k_1 a la componente k_{11} del controlador y k_2 a la k_{22}
- Calcular k_{12} como $-(g_{12}/g_{11})k_{22}$
- Calcular k_{21} como $-(g_{21}/g_{22})k_{11}$

Control Centralizado por Desacoplo

- Con desacoplo dinámico de Nordfeldt, el proceso $G(s)W(s)$ para el controlador diagonal tiene dos componentes iguales al determinante de la matriz $G(s)$ del proceso
- Por tanto es suficiente con ajustar $k(s)$ para determinar el determinante de $G(s)$
- Las componentes del controlador son consecuencia del cálculo, condicionado por la naturaleza del proceso y la del bloque controlador

Control Centralizado con 4 PID's

- Propuesta de control con 4 PID's
 - Usar desacoplo en estado estacionario
 - Las cuatro componentes del controlador $K(s)$ son PI o PID
 - K_{11} y K_{21} tendrán las mismas constantes T_i y T_D
 - Lo mismo para K_{22} y K_{12}
 - El proceso $G(s)W(s)$ sigue presentando interacción con desacoplo estacionario
 - TITO incorpora esta estrategia.

Compensación por dominancia

■ Objetivo de la optimización:

Minimizar un índice de la dominancia diagonal por columnas

$$J_j = \frac{\sum_{k=1}^N p_k \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^m \left| \sum_{l=1}^m g_{il}(j\omega_k) w_{lj}(j\omega_k) \right|}{\sum_{k=1}^N p_k \left| \sum_{l=1}^m g_{jl}(j\omega_k) w_{lj}(j\omega_k) \right|}$$

■ Estructuras del compensador

Genérica

$$w_{ij}(s) = \frac{w_{n_{ij}}(s)}{w_{p_{ij}}(s)}$$

Polinómica

$$w_{ij}(s) = w_{0ij} + w_{1ij}s + \dots + w_{\beta j} s^{\beta}$$

Red clásica de compensación

$$w_{ij}(s) = \frac{\frac{s}{w_{0ij}} + 1}{\frac{s}{w_{pij}} + 1}$$

Síntesis

- Objetivo general:

Conseguir que el sistema de control presente un comportamiento óptimo

- Técnicas particulares:

- Control óptimo

Determinar el controlador $K(s)$

Procedimiento analítico off-line

Controlador de parámetros fijos

- Control predictivo

Fijar una estrategia de decisión para el controlador

Interacción con el usuario a través de parámetros de control y restricciones

Un poco de historia

■ Control óptimo:

- 1960, Kalman da solución al problema de control óptimo lineal (LQR)
- 1961, filtro de Kalman (LQE)
- 1963, LQR+LQE \Rightarrow LQG
- 1979, Doyle y Stein proponen LTR como una versión robusta del LQG
- 1984, Francis y Helton resuelven el problema H_∞ multivariable

Un poco de historia

- Control predictivo:
 - 1970, interés por abordar problemas de control industriales (Control Adaptativo)
 - 1978, primeros controladores predictivos; MPHC (Richalet) y DMC (Cutler y Ramaker)
 - 1980s, popularidad del control predictivo, gestación de las teorías
 - 1996, fusión de intereses (predictivo+robusto), Honeywell presenta el RMPCT

Controlador LQG

■ Hipótesis:

- El modelo es lineal (A,B,C,D) con perturbaciones en los estados y ruido en la variables controladas o medidas
- Los estados del proceso no son accesibles
 - » Subproblemas:
 - Problema del observador: filtro de Kalman,
 - Problema de control: controlador LQR (estados estimados = est. proceso)

■ Matrices de ganancias:

- K_o , del observador
- K_c , de la realimentación de estados

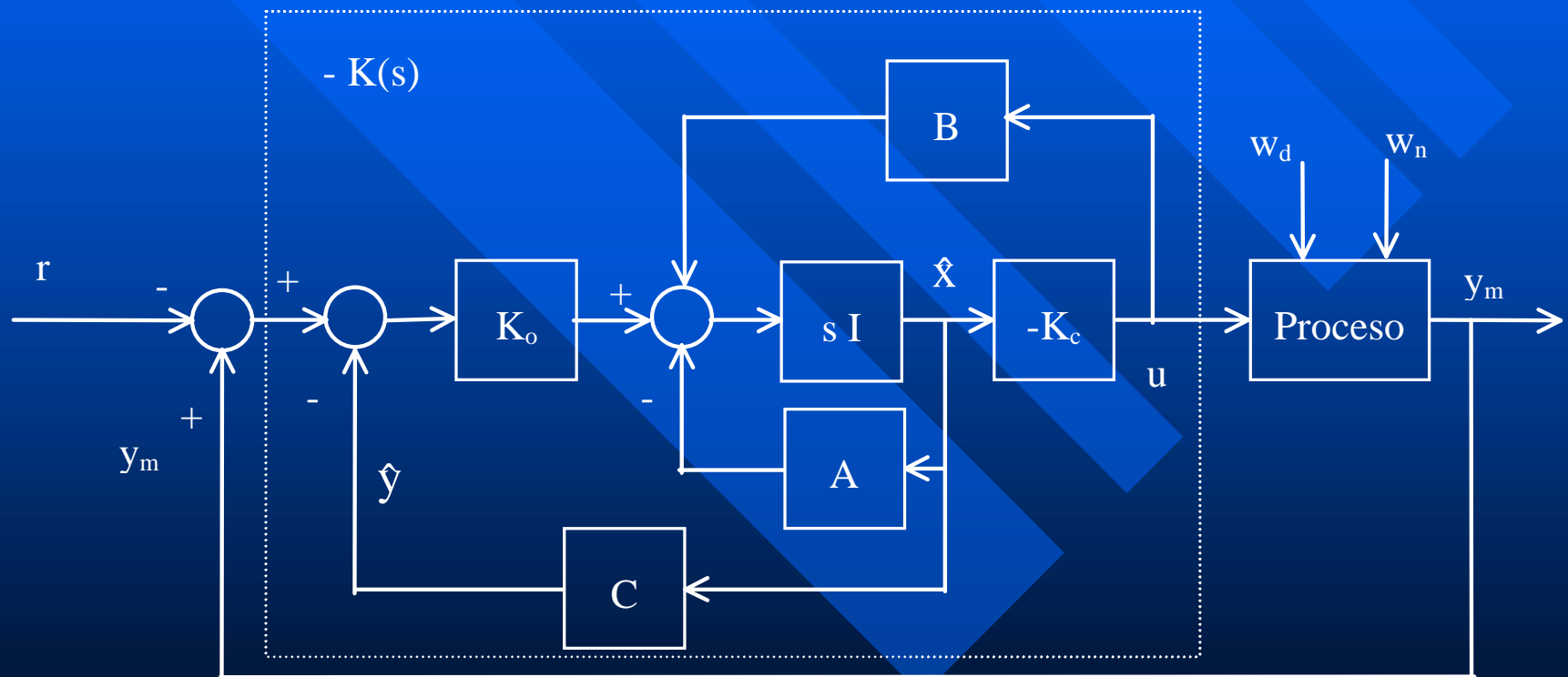
■ Parámetros de diseño del controlador:

- Mismo orden que el proceso
- Potencias espectrales de las perturbaciones y ruido (W y V)
- Matrices de peso (Q y R) del LQR

Controlador LQG

- Estructura de control con señal de referencia

$$\mathbf{K}(s) = \mathbf{K}_c (s \mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{K}_c + \mathbf{K}_0 \mathbf{C})^{-1} \mathbf{K}_0$$



Controlador LTR

- Hipótesis:

- Es preciso mejorar las propiedades del LQG

- Solución:

- Tratar de que se comporte como el LQR en un rango de frecuencias
- Mejorar la robustez a altas frecuencias

$$FTLA_{LQG} = K_c (s I - A + B K_c + K_o C)^{-1} K_o C (s I - A)^{-1} B$$



$$FTLA_{LQR} = K_c (s I - A)^{-1} B$$

Controladores H_2 y H_∞

■ Hipótesis:

- El sistema de control tiene la configuración general

■ Solución:

- Determinar $K(s)$ que minimiza la norma H_2 o H_∞ de la matriz

$$\mathbf{T}_{zw} = \mathbf{P}_{11}(s) + \mathbf{P}_{12}(s) \mathbf{K}(s) (\mathbf{I} - \mathbf{P}_{22}(s) \mathbf{K}(s))^{-1} + \mathbf{P}_{21}(s)$$

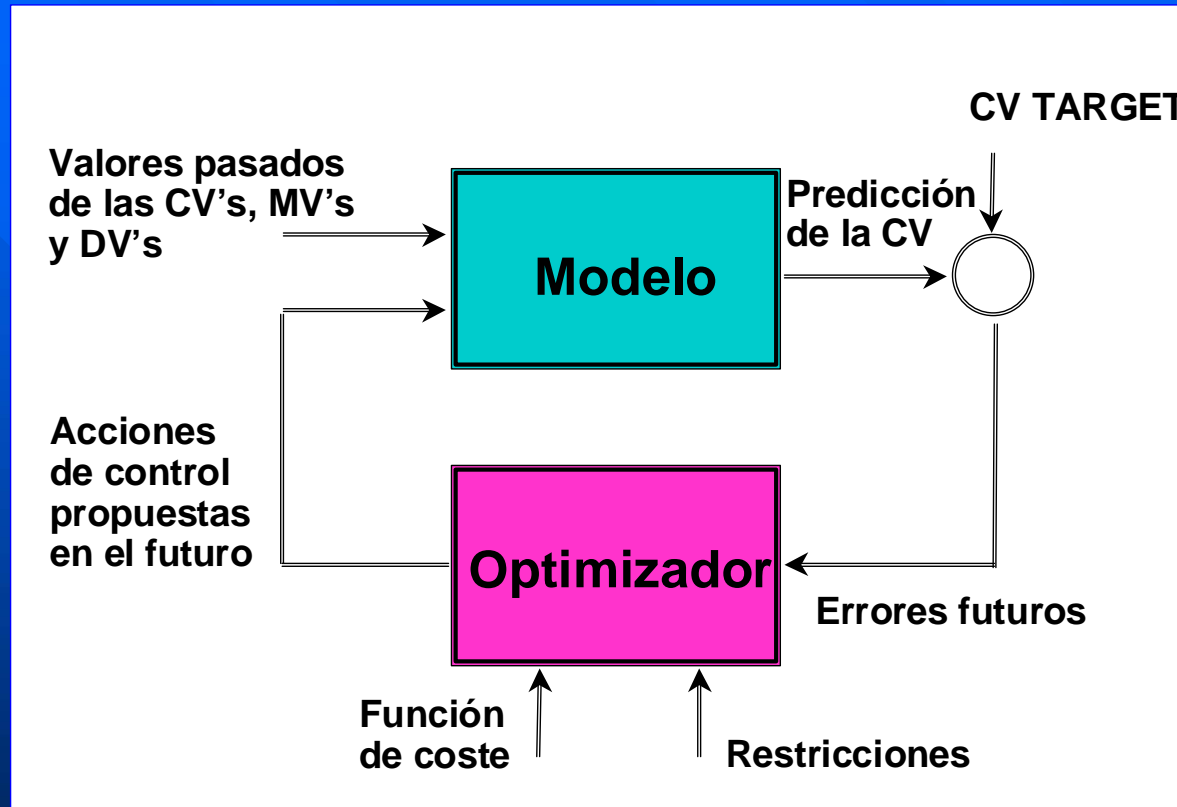
donde \mathbf{P}_{11} , \mathbf{P}_{12} , \mathbf{P}_{21} y \mathbf{P}_{22} son matrices resultantes de la partición de $\mathbf{P}(s)$

■ Parámetros de diseño:

- Pesos en las señales del sistema de control

Controlador predictivo

■ Estructura de control:



■ Solución on-line al problema de optimización:

■ Parámetros de diseño:

- Horizontes de predicción, restricciones

EJEMPLO