

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

**Colección de problemas sobre sistemas
lineales: continuos, discretos, muestreados
y representación en variables de estado**

Asignatura : AUTOMÁTICA I

Autor: Fernando Morilla García.

Revisión: MAYO 2003

**DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y AUTOMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS**

**Colección de problemas sobre sistemas
lineales: continuos, discretos, muestreados
y representación en variables de estado**

CONTENIDO :

PRESENTACIÓN

ENUNCIADOS

SOLUCIONARIO

SOLUCIONES

PRUEBAS DE EVALUACIÓN

PRESENTACIÓN.

Esta colección de problemas es un material complementario a la asignatura AUTOMÁTICA I de cuarto curso de la carrera de Ciencias Físicas, según el siguiente temario:

- TEMA I : Introducción a los sistemas de control.
- TEMA II : Descripción de sistemas continuos.
- TEMA III : Respuesta temporal transitoria y estacionaria.
- TEMA IV : Análisis de estabilidad en el plano complejo.
- TEMA V : Respuesta en frecuencia.
- TEMA VI : Diseño de controladores.
- TEMA VII : Sistemas discretos y muestreados.
- TEMA VIII : Análisis de estabilidad en sistemas discretos.
- TEMA IX : Control digital.
- TEMA X : Representación en el espacio de estados.
- TEMA XI : Controlabilidad y observabilidad.
- TEMA XII : Control en el espacio de estados.

Los seis primeros temas se refieren al estudio de los sistemas lineales continuos, los tres siguientes a los sistemas discretos y muestreados, y los tres últimos al estudio de los sistemas lineales (continuos, discretos y muestreados) utilizando la representación en variables de estado.

Los problemas de la colección se han seleccionado de pruebas de evaluación y pruebas personales de cursos anteriores y principalmente de los siguientes libros:

- R. C. DORF: "Sistemas modernos de control". Addison Wesley Iberoamericana, 1989.
- G. F. FRANKLIN and J. D. POWELL: "Digital Control of Dynamic Systems". Addison Wesley, 1980.
- G. F. FRANKLIN, J. D. POWELL and A. EMAMI-NAEINI: "Feedback Control of Dynamic Systems". Addison Wesley, 1986.

B. C. KUO: "Automatic Control Systems". Prentice Hall, fourth edition, 1982.
K. OGATA: "Ingeniería de Control Moderna". Prentice Hall, 1982.
K. OGATA: "Discrete-time Control Systems". Prentice Hall, 1987.
C. L. PHILLIPS, H. T. NAGLE: "Sistemas de Control Digital: Análisis y Diseño".
Ed. Gustavo Gili, 1987. O reimpresión de 1993.

El documento, que se presenta, incluye: los enunciados de 60 problemas, que engloban el temario de la siguiente forma: sistemas lineales continuos (1 al 30), sistemas lineales discretos y muestreados (31 al 50), representación en variables de estado (51 al 60). Un solucionario para que el alumno pueda hacer una consulta rápida de la solución a cada apartado. Soluciones detalladas a todos los problemas, excepto aquellos que se han seleccionado como parte de las pruebas de evaluación. Las cuatro pruebas de evaluación de la asignatura.

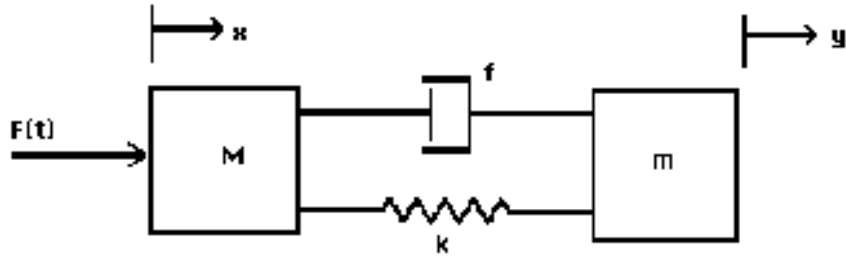
En esta nueva revisión se han corregido las erratas observadas por el profesorado y por los alumnos durante los cinco cursos que se ha utilizado la anterior revisión: Octubre 1998.

**Colección de problemas sobre sistemas
lineales: continuos, discretos, muestreados
y representación en variables de estado**

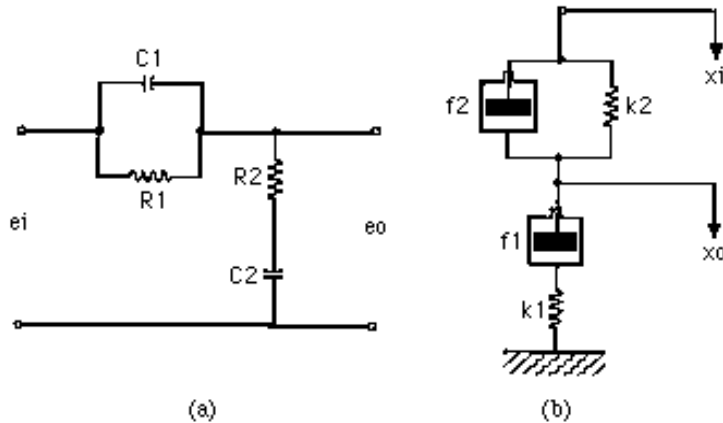
ENUNCIADOS

Enunciados

1.- Hay robots industriales que tienen una gran flexibilidad en los brazos aún con una carga pesada en las pinzas. La figura muestra un modelo de sistema flexible con dos masas. Encuéntrese la función de transferencia $Y(s)/F(s)$.

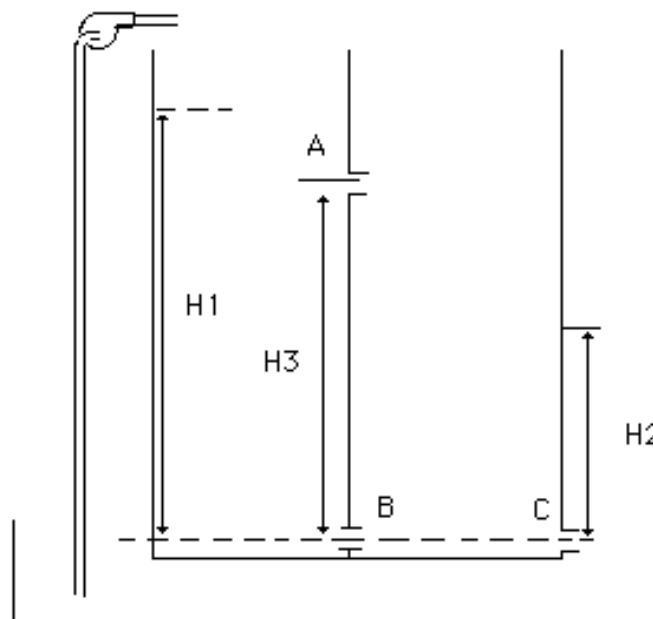


2.- Mostrar que los sistemas de las figuras son análogos, probando que sus funciones de transferencia son del mismo tipo



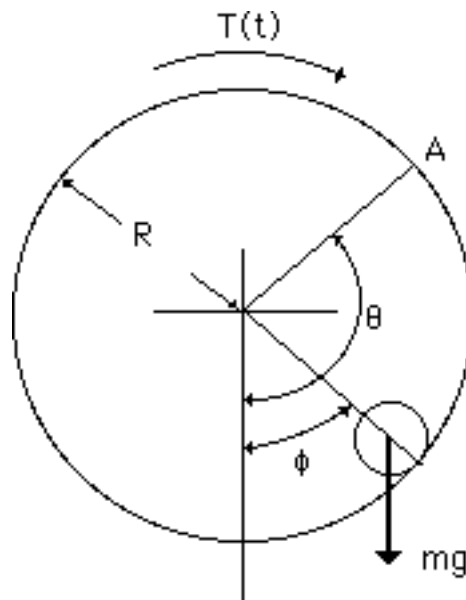
3.- Se dispone de un experimento de laboratorio que consta de dos depósitos de agua intercomunicados.

- a) Con los agujeros A y C abiertos y B tapado, escribir las ecuaciones del sistema para h_1 y h_2 en función del caudal de entrada.
- b) Escribir la función de transferencia entre el caudal de entrada y h_2 .
- c) Repetir los apartados (a) y (b) con el agujero A cerrado y los agujeros B y C abiertos.

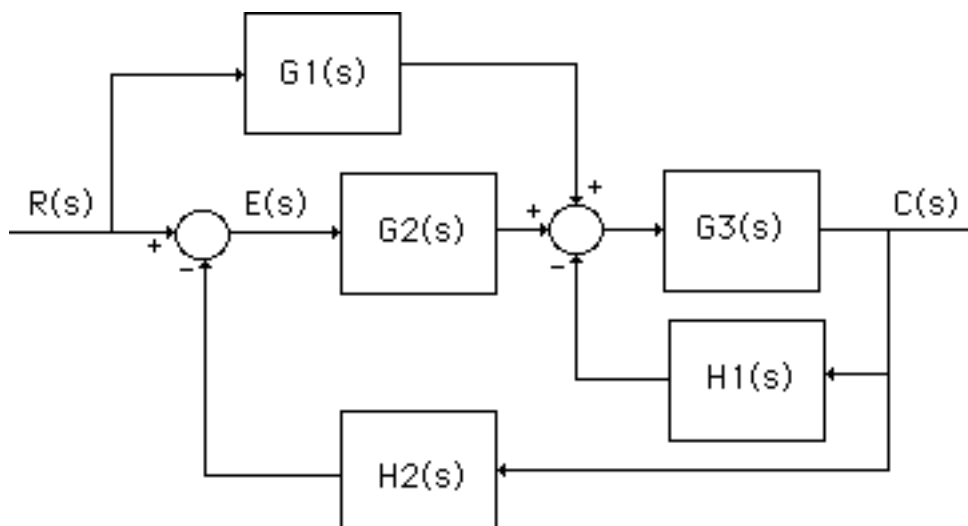


4.- Considérese un dispositivo consistente en una bola que rueda sobre el borde interior de un aro. Este modelo es semejante al problema del combustible líquido que se agita en un cohete. Como se muestra en la figura, el aro rota libremente sobre el eje horizontal. La posición angular del aro se puede controlar por medio del momento de torsión T que se le aplica, proveniente de un motor acoplado al eje motriz del aro.

- Determinéense las ecuaciones que relacionan la posición angular del aro con la posición de la bola.
- La función de transferencia $\theta(s)/T(s)$, suponiendo que la masa de la bola es pequeña.
- La función de transferencia $\phi(s)/\theta(s)$, para pequeñas variaciones de ϕ y suponiendo que el radio r de la bola es mucho menor que el del aro R .



5.- Encontrar la función de transferencia $C(s)/R(s)$ para el diagrama de bloques de la figura.

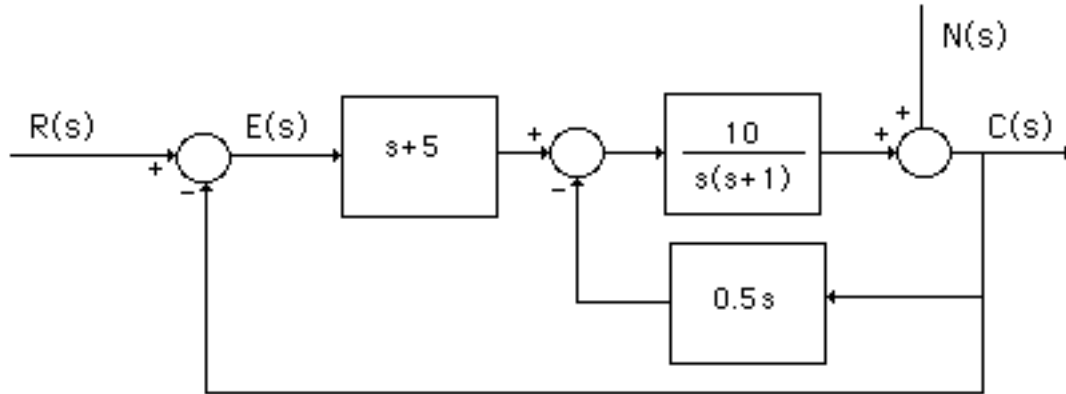


6.- La figura muestra el diagrama de bloques de un sistema de control realimentado. Encontrar las funciones de transferencia

$$\left. \frac{C(s)}{E(s)} \right|_{N(s)=0} \quad \left. \frac{C(s)}{R(s)} \right|_{N(s)=0} \quad \left. \frac{C(s)}{N(s)} \right|_{R(s)=0}$$

Enunciados

Encontrar la expresión de la salida en términos de las dos entradas $R(s)$ y $N(s)$, cuando se aplican ambas.



7.- El control de grandes procesos químicos es una parte importante del campo de la ingeniería de control. En la figura se muestra el diagrama de bloques para el circuito de control de temperatura en un proceso químico de Xyleno. Las funciones de transferencia para los componentes son

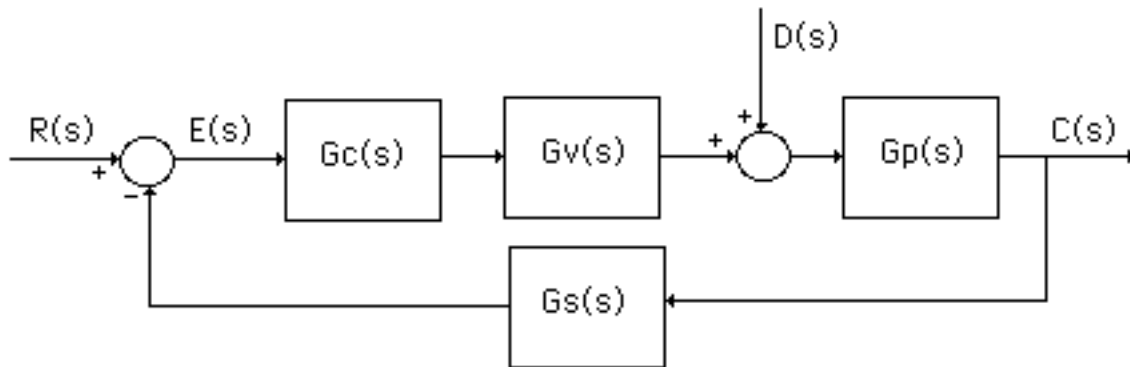
Proceso: $G_p(s) = \frac{0.03}{s^2 + 0.25s + 0.01}$

Sensor: $G_s(s) = \frac{2}{3s + 1}$

Regulador: $G_c(s) = \frac{K(s^2 + s + 0.1)}{s}$

Válvula: $G_v(s) = \frac{2}{2s + 1}$

- a) Exprese la transformada de Laplace de la salida del sistema, $C(s)$, en función de la referencia $R(s)$ y de la perturbación $D(s)$.
- b) Obtener una expresión aproximada para la respuesta del sistema a un cambio escalón unitario en la referencia, cuando $K=0.2$.



8.- En la siguiente figura se muestra el diagrama de bloques del control automático de freno de un tren de alta velocidad, donde:

V_r = voltaje correspondiente a la velocidad deseada

v = velocidad del tren en m/s

K = ganancia del amplificador = 100

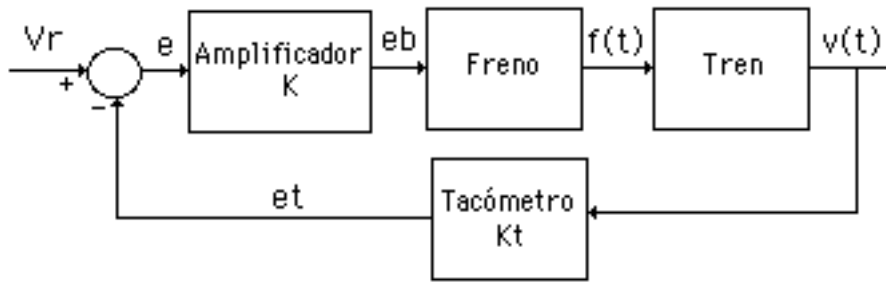
M = masa del tren = 25 T

K_t = constante del tacómetro = 0.15 V s/m

Y donde la respuesta del freno a una entrada escalón unitario, despreciando las fuerzas de fricción, obedece a la ecuación $f(t) = 100 (1 - e^{-10t})$.

- a) Determinar la función de transferencia de los bloques tren y freno.
- b) Obtener la función de transferencia del sistema en lazo cerrado.

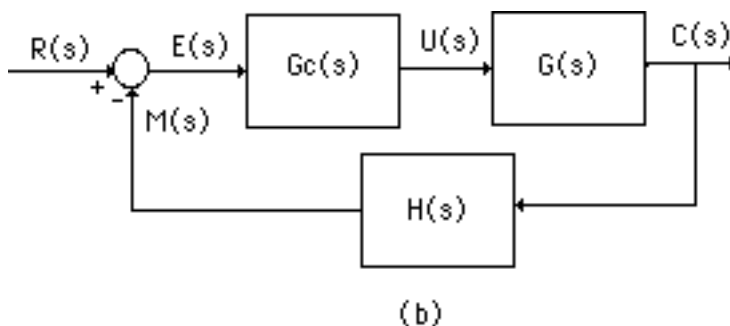
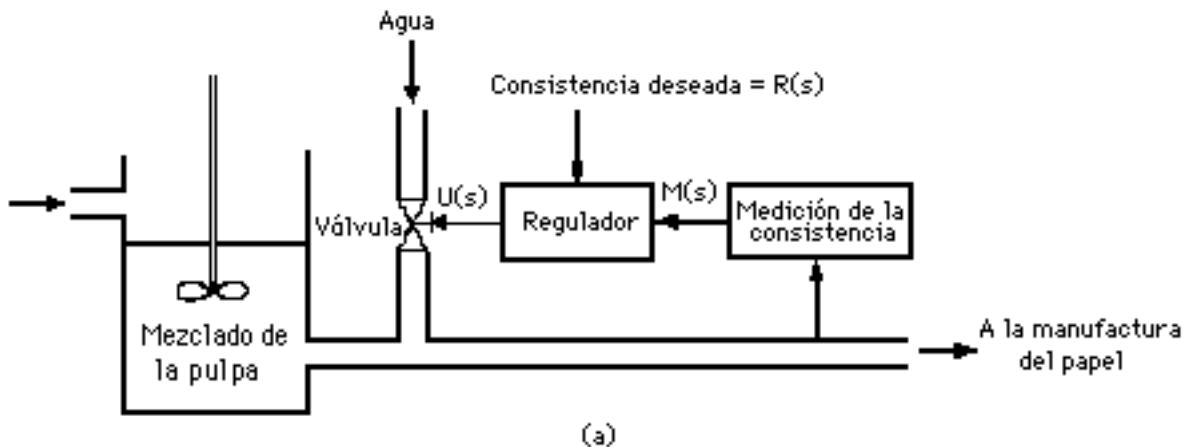
c) Si la velocidad del tren se quiere mantener de forma estable a 60 m/s, ¿cuál debe ser el valor de V_r ?



9.- Un objetivo importante en el proceso de manufactura del papel es mantener una consistencia uniforme en la pulpa de salida a medida que ésta pasa al secado y enrollamiento. En la figura (a) se muestra un esquema del sistema de control de consistencia por dilución en agua. En la figura (b) se muestra el diagrama de bloques. Sean $H(s)=1$ y

$$G_c(s) = \frac{K}{10s + 1} \quad G(s) = \frac{1}{2s + 1}$$

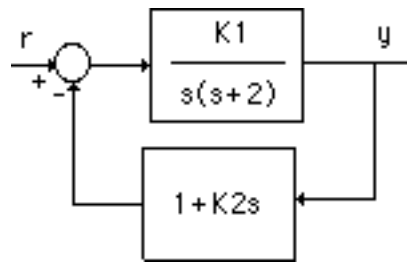
Determinése: a) La función de transferencia del sistema en lazo cerrado; b) el valor de K para que el error en estado estacionario para un cambio en escalón de la consistencia deseada no sea superior al 1%.



10.- El sistema de control de la figura se ha diseñado para que cumpla las siguientes especificaciones: (1) error estacionario menor del 10% para entrada en rampa, (2) máxima sobreelongación menor del 5%, (3) tiempo de asentamiento (para un 2%) menor de 3 s.

Enunciados

Se pide: a) La función de transferencia del sistema en lazo cerrado. b) El error estacionario para rampa unitaria. c) Dibujar sobre el plano-s la región donde pueden estar los polos. d) ¿Qué implican las especificaciones sobre los posibles valores de K_1 y K_2 ?



11.- Aplíquese el criterio de Routh para obtener las condiciones generales de estabilidad de un sistema de tercer orden, cuando todos los coeficientes de su polinomio característico son positivos.

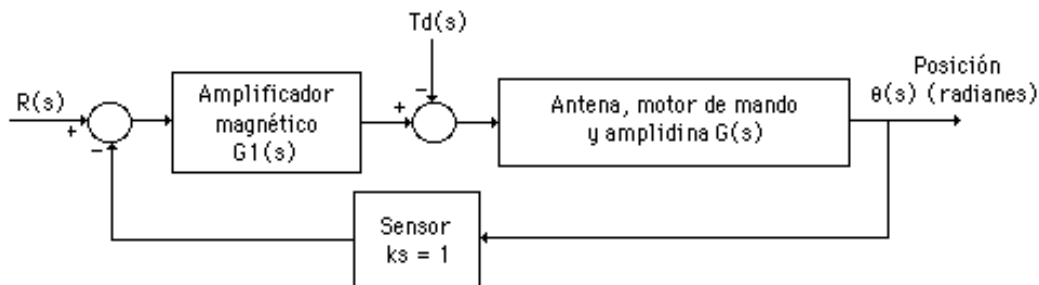
12.- Ultimamente han adquirido gran importancia las grandes antenas para microondas en radioastronomía y en el rastreo de satélites. Este tipo de antenas está expuesto a momentos de torsión muy grandes debidos a las ráfagas de viento. Concretamente para una antena de 20 m de diámetro, los experimentos muestran que un viento de 56 km/h ejerce una perturbación máxima de 2 V en la entrada, $T_d(s)$ de la amplidina. Otro de los problemas del manejo de antenas grandes es su resonancia estructural, que se pone de manifiesto en el siguiente modelo para el conjunto (antena, motor de mando y amplidina)

$$G(s) = \frac{100}{s^2 + 8s + 100}$$

En la figura se muestra el servosistema de la antena, en el que el controlador es un amplificador magnético, con función de transferencia

$$G_1(s) = \frac{k_a}{0.2s + 1}$$

- a) Determínese la estabilidad del sistema en función de la ganancia, k_a , del amplificador.
- b) Determínese el error del sistema en estado estacionario, operando en lazo abierto ($k_s=0$) con $R(s)=0$, para una ráfaga de viento de 56 km/h.
- c) Determínese el valor de k_a para mantener el error del sistema en estado estacionario, operando en lazo cerrado con $R(s)=0$, por debajo de 2° para una ráfaga de viento de 56 km/h

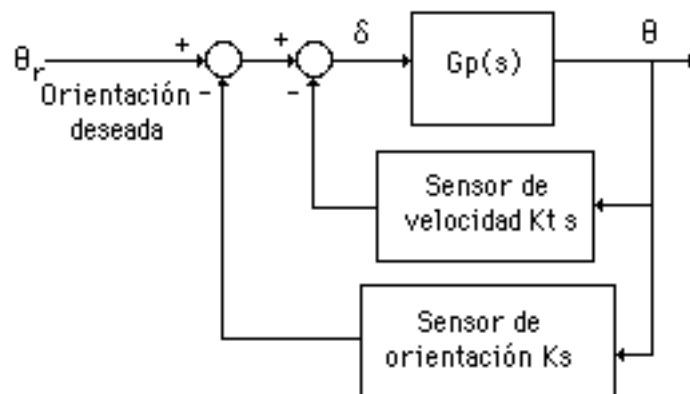
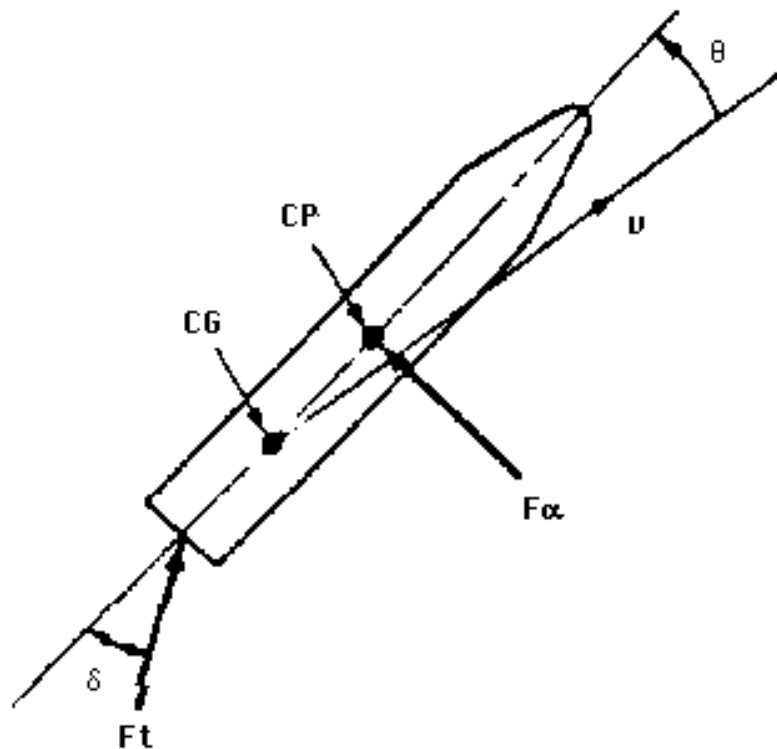


13.- Las figuras (a) y (b) muestran un impulsor espacial y el sistema de control de posición de éste. El centro aerodinámico de presión se denomina CP, el centro de gravedad CG, F_α es la fuerza aerodinámica normal, y v es la velocidad del vehículo. El ángulo del dispositivo es δ , y desarrolla un empuje F_T . La función de transferencia del vehículo es $G_p(s)$, y es inestable en lazo abierto si el centro de presión está por delante del centro de gravedad. Para este caso el vehículo tenderá a caer. El diagrama de bloques muestra una realimentación analógica de velocidad y otra realimentación de posición. La función de transferencia del cuerpo rígido es

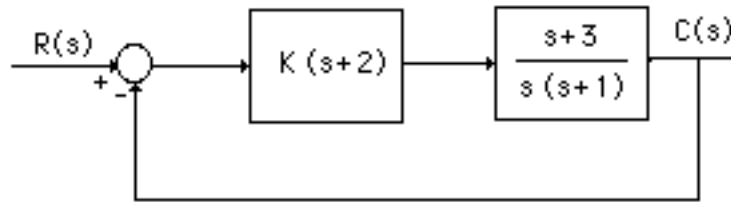
$$G_p(s) = \frac{K}{s^2 - a}$$

Esta función no incluye los efectos del alabeo del vehículo ni de las salpicaduras del combustible líquido, que añadirían 22 órdenes a la función de transferencia. Adicionalmente la dinámica del actuador que controla δ ha sido omitida.

- Con $K_t=0$, determinar el comportamiento del conjunto del sistema con respecto a los valores de K , K_s y a .
- Considerando que ambos bucles están activos, determinar los valores mínimos de K_t y K_s en términos de K y a para que el vehículo no caiga.
- Se desea que el sistema sea subamortiguado, con coeficiente de amortiguamiento δ y frecuencia natural ω_n , expresar K_t y K_s en términos de ω_n , δ , a y K .

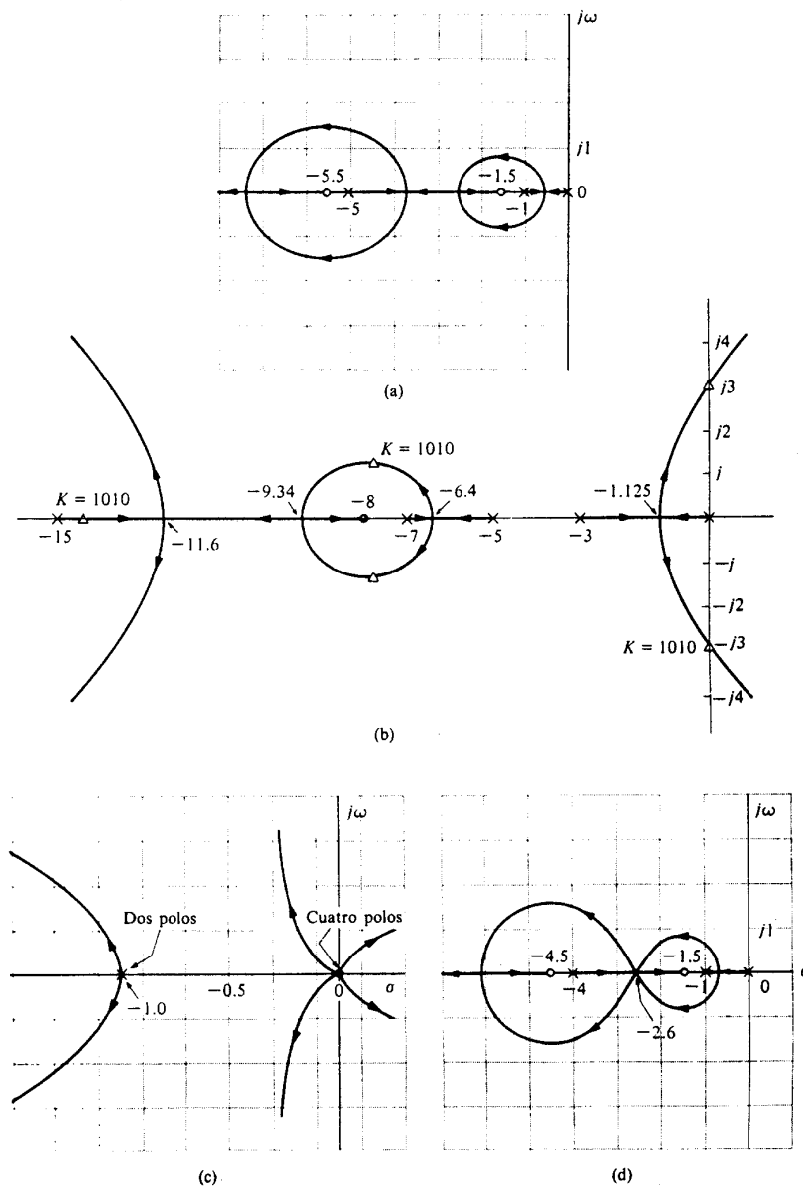


14.- Trazar el lugar de las raíces para el sistema de la figura. Determinar los rangos de valores de K para los que el sistema es sobreamortiguado y para los que es subamortiguado.



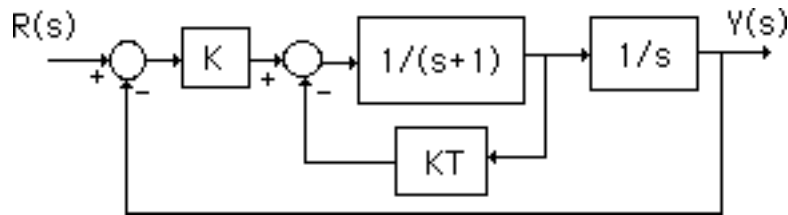
15.- Para el servosistema de gran antena, analizado en el problema 12, representétese el lugar de las raíces en función de la ganancia del amplificador.

16.- Para sistemas de grado relativamente alto, la forma del lugar de las raíces puede adoptar un patrón inesperado. En la figura se muestran los lugares de cuatro sistemas diferentes. Verificar que corresponden a sistemas reales y que toda la información contenida en ellos es congruente.



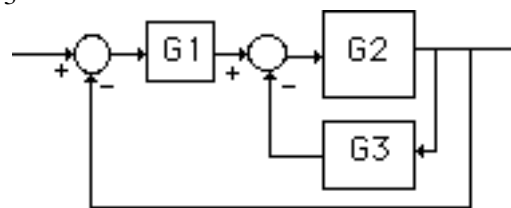
17.- El siguiente diagrama de bloques corresponde a un servomecanismo de posición con realimentación tacométrica (debido al bloque K_T) y control proporcional (debido al bloque K).

- Dibujar el lugar de las raíces con K como parámetro y con $K_T=0$.
- Indicar sobre el lugar (a) las raíces correspondientes a $K=4$, y determinar para ellas las características asociadas de respuesta transitoria: t_r (tiempo de subida), M_p (máxima sobreelongación) y t_s (tiempo de asentamiento).
- Dibujar el lugar de las raíces con $K=4$ y K_T como parámetro.
- Sobre el lugar (c) determinar K_T de forma que $M_p=0.05$ (que equivale a $\delta=0.707$), y estimar el t_r y t_s asociados a estas raíces.
- Calcular el error estacionario en velocidad para el sistema con los parámetros del apartado (d).

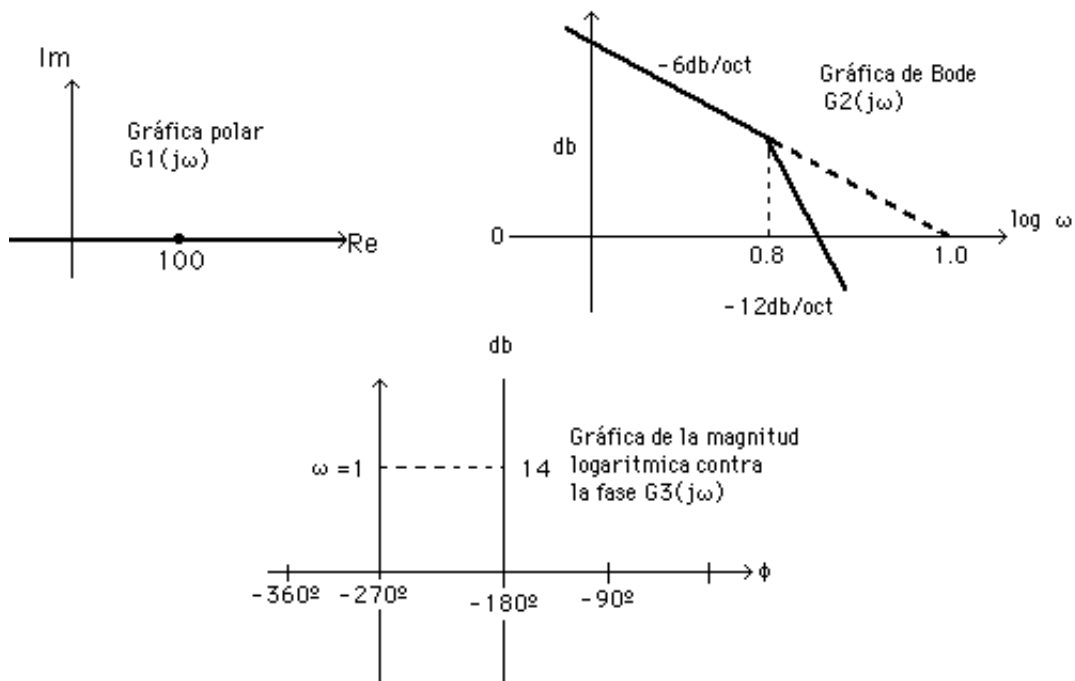


18.- En la figura (a) se muestra el diagrama de bloques para un sistema de control con realimentación. Las respuestas en frecuencia de los bloques se representan con distintos diagramas en la figura (b).

- Determinar la función de transferencia de cada bloque. Supóngase que todos los bloques son de fase mínima.
- Determinarse el coeficiente de amortiguamiento del sistema cuando G_3 se desconecta de éste.
- Repetir (b) con el bloque G_3 conectado.



(a)



(b)

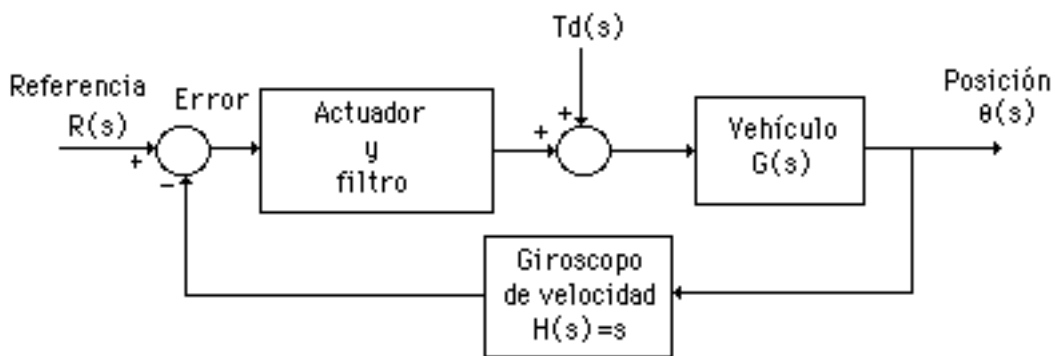
19.- Un aeroplano de despegue vertical (VTOL) es un vehículo inherentemente inestable y requiere un sistema automático de estabilización. En la figura aparece el diseño, en forma de diagrama de bloques, para un sistema de estabilización de un VTOL. A 40 nudos, la dinámica del vehículo se representa aproximadamente por la función de transferencia

$$G(s) = \frac{10}{s^2 + 0.25}$$

El actuador y el filtro se representan por la función de transferencia

$$G_c(s) = \frac{K(s + 7)}{s + 2}$$

- Dibújese el diagrama de Bode del sistema en lazo abierto, cuando $K=6$.
- Determinense los márgenes de ganancia y de fase del sistema.
- Determinese el error en la posición $\theta(s)$ para un viento perturbador que provoca un escalón, $T_d(s)=1/s$.
- Determinese la amplitud máxima de la respuesta en frecuencia del sistema en lazo cerrado, así como la frecuencia a la que se presenta.



20.- Dibujar el diagrama de Nyquist para cada uno de los sistemas siguientes:

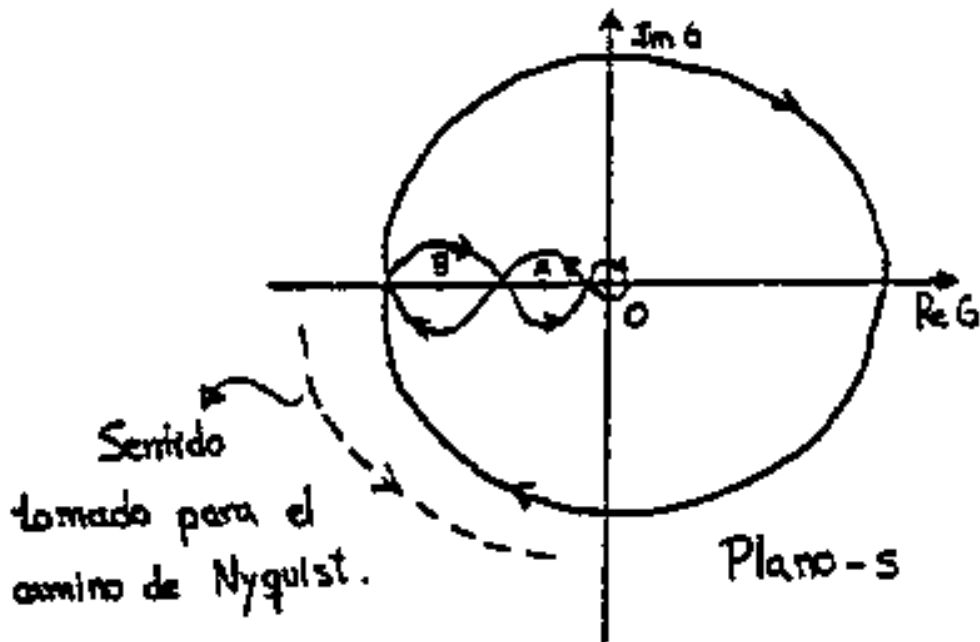
a) $K G(s) = \frac{K(s + 1)}{s^2(s + 10)}$ b) $K G(s) = \frac{K(s + 1)}{s(s + 2)}$ c) $K G(s) = \frac{K}{(s + 2)(s^2 + 9)}$

Determinar en cada caso el rango de K que hace al sistema en lazo cerrado estable y verificarlo cualitativamente sobre el lugar de las raíces.

21.- En la figura se muestra el diagrama de Nyquist completo correspondiente a la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$ de un sistema de control con realimentación unitaria. Determinar las condiciones de estabilidad en lazo abierto y en lazo cerrado del sistema bajo las condiciones siguientes:

- $G(s)$ tiene un cero en el semiplano- s derecho, A es el punto $(-1, j0)$.
- $G(s)$ tiene un cero en el semiplano- s derecho, B es el punto $(-1, j0)$.
- $G(s)$ no tiene ceros en el semiplano- s derecho, A es el punto $(-1, j0)$.
- $G(s)$ no tiene ceros en el semiplano- s derecho, B es el punto $(-1, j0)$.

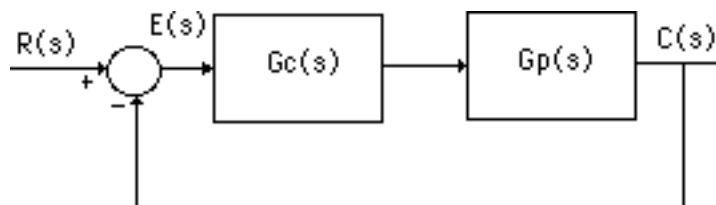
Para cada caso, si el sistema en lazo abierto o en lazo cerrado es inestable dar el número de polos que están en el semiplano- s derecho.



22.- Dado el diagrama de bloques de la figura, donde $G_p(s)$ viene dada por

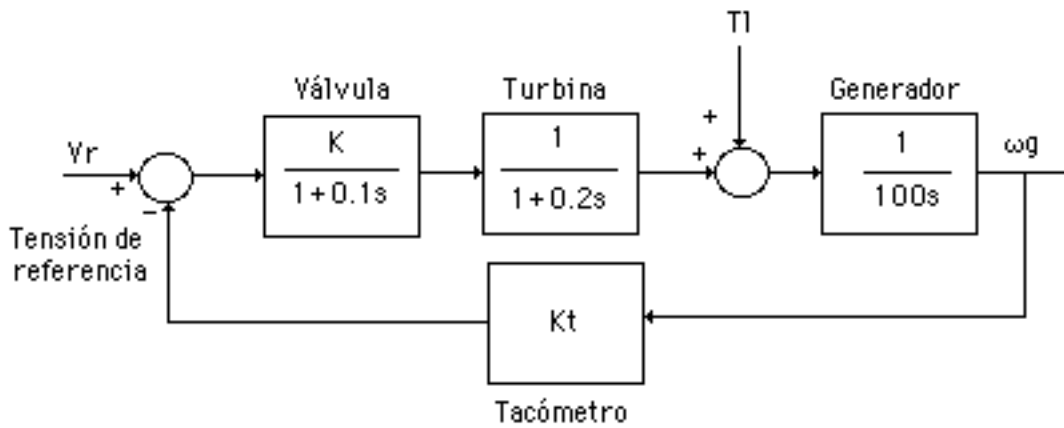
$$G_p(s) = \frac{4}{s(s^2 + 4s + 6)}$$

Diseñar un bloque controlador $G_c(s)$ tal que: (1) El error estacionario para una entrada rampa unitaria sea 1.5, (2) las raíces dominantes del sistema en lazo cerrado sean $-1+j$ y $-1-j$.



23.- La figura muestra el diagrama de bloques de un sistema de control de velocidad para un generador de potencia eléctrica. La válvula reguladora de velocidad controla el flujo de vapor que entra en la turbina. La turbina mueve el generador, que produce una potencia eléctrica a una frecuencia proporcional a la velocidad angular del generador ω_g . La velocidad en estado estacionario del generador es de 1000 rpm, a la cual la frecuencia de salida es de 50 Hz.

- Sea K , la ganancia de la válvula, igual a 10 rad/V. Tomando K_t como parámetro de control, se desea que los polos dominantes del sistema en lazo cerrado tengan factor de amortiguamiento $\delta=0.707$. Basándose en técnicas del lugar de las raíces, determinar el valor de K_t para conseguir el amortiguamiento deseado.
- Con el valor de K_t determinado en el apartado (a) y sin carga ($T_L=0$), calcular la tensión de referencia para que la velocidad del generador sea de 1000 rpm.
- Con el valor de K_t determinado en el apartado (a), calcular la desviación que produce en la velocidad del generador un cambio brusco en la carga T_L .
- Se desea mantener la variación en la frecuencia de la red debida a T_L en $(\pm)0.1\%$. Al mismo tiempo se desea que el coeficiente de amortiguamiento del sistema esté próximo al 0.707. ¿Se pueden satisfacer ambos requisitos con sólo variar K y K_t ?

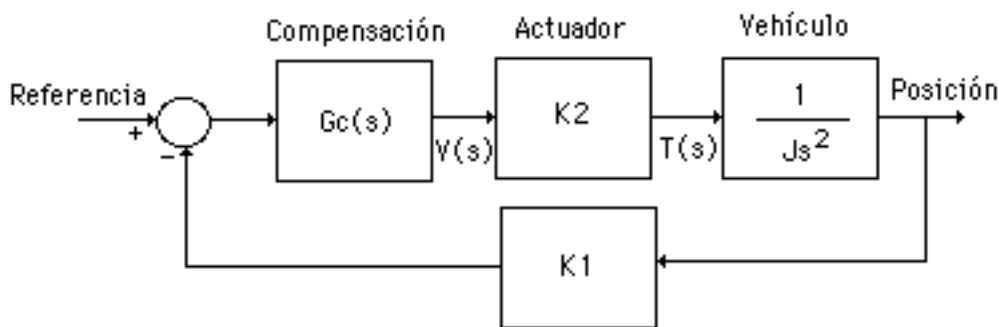


24.- La función de transferencia en lazo abierto de un sistema de control con realimentación unitaria es:

$$G(s) = \frac{K}{s(0.1s + 1)(s + 1)}$$

- a) Determinar el valor de K para que el pico de resonancia M_r del sistema sea igual a 1.4.
- b) Determinar el valor de K para que el margen de ganancia del sistema sea 20 dB.
- c) Determinar el valor de K para que el margen de fase del sistema sea 60° .

25.- El diseño del módulo de excursión lunar del Apolo 11 fue un interesante problema de control. En la figura se muestra el sistema de control para dicho vehículo. La amortiguación del vehículo es despreciable y la posición se controla por chorros de gas. El momento de torsión, en primera aproximación, se considerará proporcional a la señal $V(s)$, de forma que $T(s) = K_2 V(s)$. El diseñador puede seleccionar la ganancia del circuito de modo que proporcione una amortiguación adecuada. Se necesita un coeficiente de amortiguamiento de 0.5 (margen de fase aproximado de 50°) y un tiempo de asentamiento menor de 2 s. Determinése un compensador $G_c(s)$ por red de adelanto usando (a) técnicas de respuesta en frecuencia y (b) métodos del lugar de las raíces.

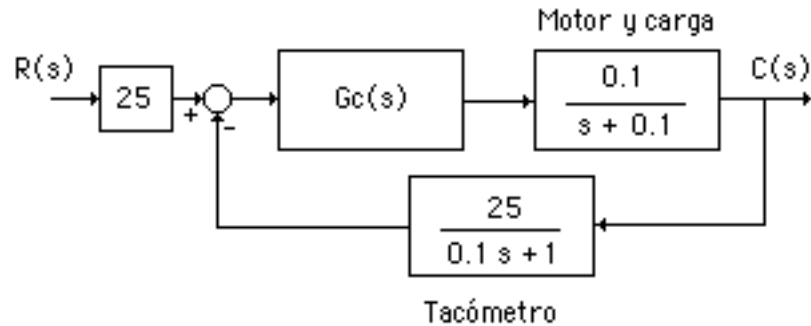


26.- Un sistema de control con realimentación unitaria tiene una planta con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{s \left(\frac{s}{2} + 10\right) \left(\frac{s}{6} + 1\right)}$$

Se desea tener un coeficiente de error de velocidad $K_v=20$, un margen de fase de 45° y un ancho de banda igual o mayor que 2 rad/s. Diseñar una red de retardo de fase para cumplir dichas especificaciones.

27.- Una mesa estabilizada de precisión usa un tacómetro y un motor de corriente continua como se muestra en la figura. Se desea mantener una alta precisión en estado estacionario para el control de velocidad, para lo que se elige un controlador proporcional integral. Selecciónense los parámetros del controlador tal que el sistema tenga una sobreelongación de aproximadamente el 10% (margen de fase aproximado de 60°) y un tiempo de asentamiento entre 0.5 y 1 s.



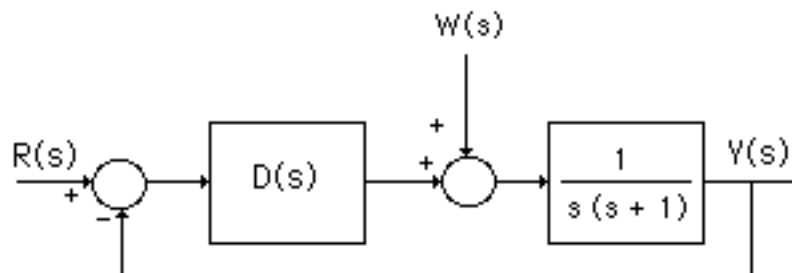
28.- Repítase el problema anterior usando como compensador una red de adelanto y compárense los resultados.

29.- Considérese el sistema de control de la figura. Se desea diseñar el compensador $D(s)$ de forma que se cumplan las siguientes especificaciones: (1) la desviación en la salida respecto a la referencia producida por un cambio escalón en la carga $W(s)$ debe ser menor del 80%, (2) $\delta=0.707$.

a) Mostrar que un control proporcional no es adecuado.

b) Mostrar que un control proporcional derivativo sí lo es.

c) Determinar las ganancias proporcional y derivativa del controlador PD para que se cumplan las especificaciones de diseño.



30.- Un sistema de control con realimentación unitaria para un submarino robot tiene una planta con la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{K}{s(s + 10)(s + 1000)}$$

Se desea que la sobreelongación sea aproximadamente del 7.5% para una entrada escalón y que el tiempo de asentamiento sea de 400 ms. Encuéntrese un compensador adecuado por adelanto de fase usando el método del lugar de las raíces. Suponiendo que el cero del compensador se localiza en $s=-20$; determínese el polo del compensador y el coeficiente de error de velocidad del sistema.

Enunciados

31.- Resolver la siguiente ecuación en diferencias para $x(k)$ utilizando:

- a) La técnica secuencial.
- b) La transformada z .
- c) ¿Daré el teorema del valor final el valor correcto de $x(\infty)$?

$$x(k) - 3x(k-1) + 2x(k-2) = e(k)$$

siendo

$$e(0) = e(1) = 1 \quad ; \quad e(k) = 0, \quad k \geq 2$$

$$x(-2) = x(-1) = 0$$

32.- Calcular la transformada inversa para cada una de las siguientes funciones:

a) $F(z) = \frac{z^2}{z^2 + 1}$

b) $F(z) = \frac{z(z - 1)}{z^2 - 1.25z + 0.25}$

c) $F(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 1}$

d) $F(z) = \frac{z}{(z - 0.5)(z - 2)}$

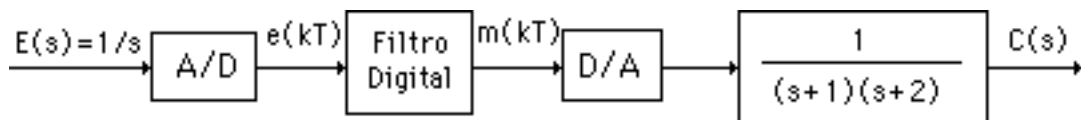
33.- Encontrar la respuesta del sistema, inicialmente en reposo, descrito por la siguiente ecuación en diferencias, a una entrada escalón.

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = r(k+2) + r(k+1) + r(k)$$

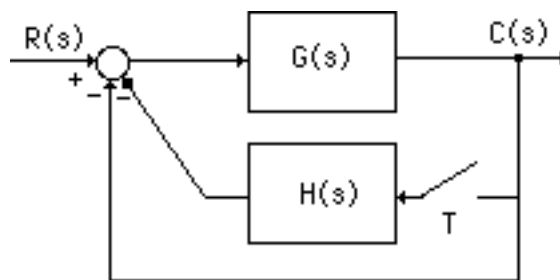
34.- En el siguiente sistema, el filtro digital resuelve la ecuación en diferencias

$$m(k+1) = 0.5 (e(k+1) - 0.99 e(k)) + 0.995 m(k)$$

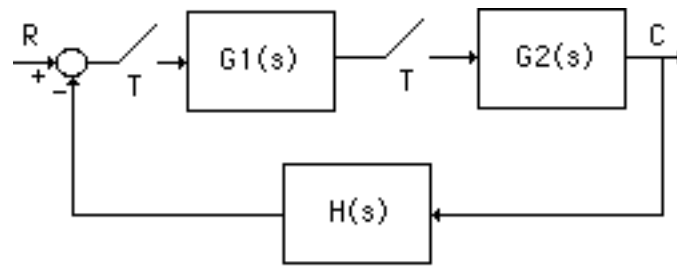
La frecuencia de muestreo es 25 Hz. a) Encontrar $C(z)$. b) Determinar $c(0)$ y $c(\infty)$.



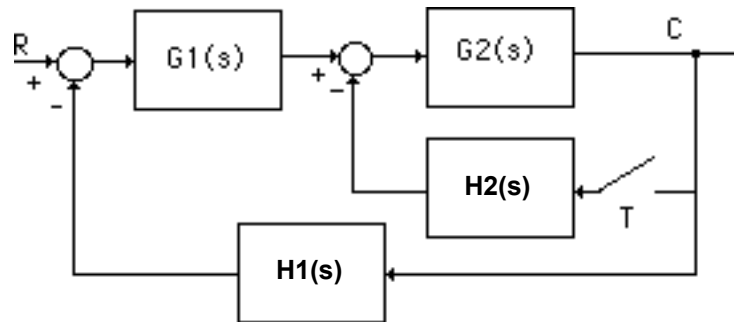
35.- Para cada uno de los siguientes sistemas muestreados en lazo cerrado, exprese $C(z)$ como una función de la entrada y de las funciones de transferencia mostradas.



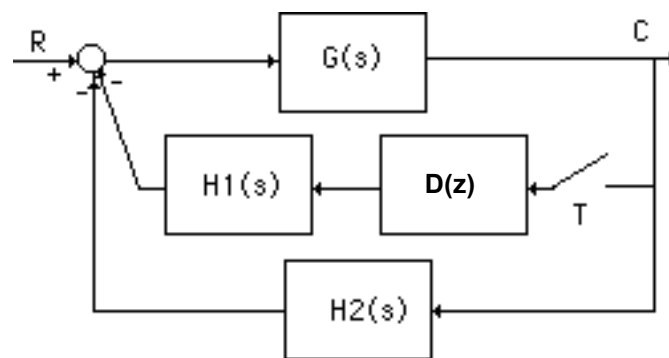
(a)



(b)



(c)

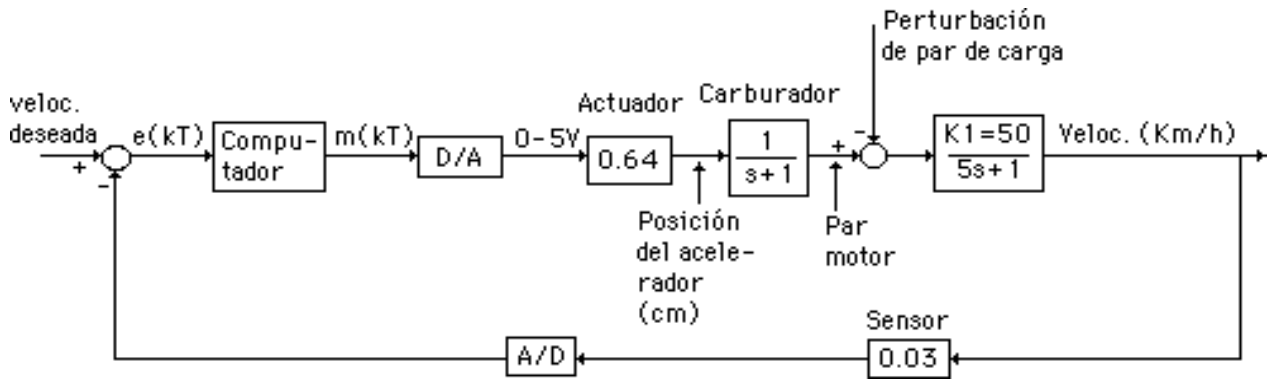


(d)

36.- El siguiente diagrama de bloques muestra el esquema funcional de un sistema de control de marcha para un automóvil. El actuador controla la posición del acelerador, el carburador se modela como un sistema de primer orden con una constante de tiempo de 1 sg, y la carga total en el motor también se modela como un sistema de primer orden con ganancia 50 y constante de tiempo de 5 sg.
 a) Expresar la velocidad $V(z)$ como una función de la velocidad de referencia y de la perturbación de par resistente. Siendo:

$$M(z) = D(z) E(z) \quad ; \quad G_1(s) = \frac{0.64}{s + 1} \quad ; \quad G_2(s) = \frac{50}{5s + 1}$$

- b) Considerando que el par perturbador es nulo, que el período de muestreo es $T=0.2$ sg y que la función de transferencia del control digital es igual a la unidad, evaluar la respuesta a una entrada en escalón de 5 km/h.
- c) Repetir el apartado (b) con la función de transferencia del carburador igual a la unidad.
- d) Dibujar los resultados del apartado (b) y (c) para $0 \leq t \leq 20$ sg, y nótese los efectos de ignorar la constante de tiempo del carburador.



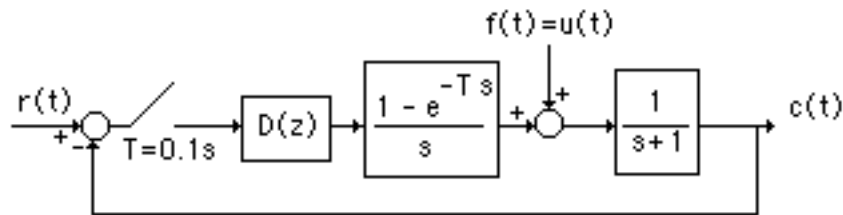
37.- El siguiente sistema es un sistema de control regulador, en el cual se desea mantener la salida $c(t)$, a un valor constante en presencia de una perturbación $f(t)$.

a) Suponiendo que la perturbación es un escalón unitario y que $D(z)=1$ (es decir, sin compensación) encontrar el valor estacionario de $c(t)$.

b) Para que $f(t)$ no tenga efecto en el valor estacionario de $c(kT)$, $D(z)$ debería tener un polo en $z=1$. Repetir el apartado (a) con

$$D(z) = 1 + \frac{0.1z}{z-1}$$

c) Sea $f(t)=0$. Encontrar los errores estacionarios para $r(t)$ entrada en escalón y entrada en rampa, en los dos casos de controlador $D(z)$.



38.- Pronosticar la naturaleza de la respuesta transitoria de un sistema discreto cuya ecuación característica sea:

- | | |
|------------------------|----------------------------|
| a) $z^2 - z + 0.5 = 0$ | b) $z^2 - 1.7z + 0.72 = 0$ |
| c) $z^2 - z + 1 = 0$ | d) $z^2 - z + 2 = 0$ |
| e) $z^2 - 1 = 0$ | f) $z^2 - 0.64 = 0$ |

39.- El siguiente diagrama muestra un sistema de control de temperatura.

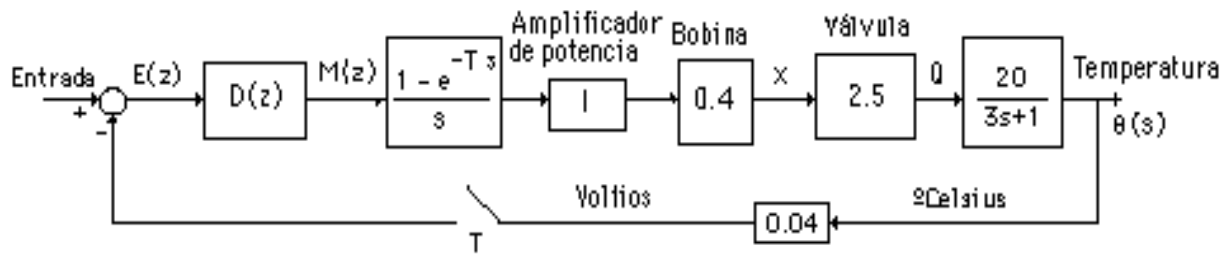
a) Calcular la función de transferencia $G(z)=\theta(z)/M(z)$ si $T=0.3$ sg.

b) Suponiendo que el sistema está en lazo abierto, que $D(z)=1$ y que se parte de condiciones iniciales nulas, determinar los cinco primeros valores discretos de la temperatura, como respuesta a una entrada en escalón unitario.

c) Si se sustituye el controlador anterior por un controlador PI, dado por la siguiente expresión

$$D(z) = K_P \left(1 + 0.5 \frac{z+1}{z-1} \right)$$

encontrar el valor de K_P para que el sistema en lazo cerrado tenga raíces complejas conjugadas con tiempo de asentamiento $t_s = 4 / \delta \omega_n = 16$ sg.



40.- Estudiar la estabilidad del siguiente sistema en función de a y b.

$$y(k) = a y(k-1) + b y(k-2) + r(k-1)$$

41.- Dibujar el lugar de las raíces para el sistema, con función de transferencia en lazo abierto

$$\frac{0.5 K (z + 1)}{(z - 1)^2}$$

42.- Para el sistema de control de marcha para un automóvil, véase problema 36, con $D(z)=K$, es decir con un controlador digital proporcional, y período de muestreo $T=0.2$ sg se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$z^2 - 1.7795 z + 0.7866 + 0.03 K (0.1183 z + 0.1092) = 0$$

- a) Determinar el rango de valores de K para los que el sistema es estable (se recomienda aplicar las condiciones generales, obtenidas en el problema 40, para un sistema de segundo orden).
- b) Dibujar el lugar de las raíces y comprobar sobre éste el rango de estabilidad determinado en el apartado anterior.
- c) Repetir los apartados (a) y (b) para la siguiente ecuación característica, resultante de ignorar la constante de tiempo del carburador,

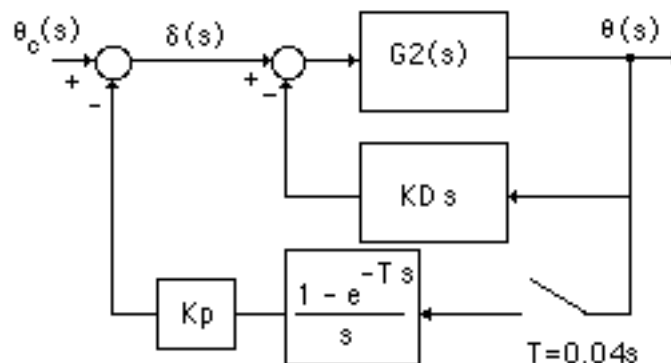
$$z - 0.9608 + 0.03 1.2547 K = 0$$

y comparar resultados.

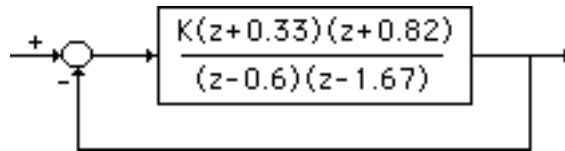
43.- La figura muestra un sistema de control muestreado para un impulsor espacial, como el del problema 13. Concretamente, para el Saturno V la función de transferencia del cuerpo rígido es

$$G_P(s) = \frac{0.9407}{s^2 - 0.0297}$$

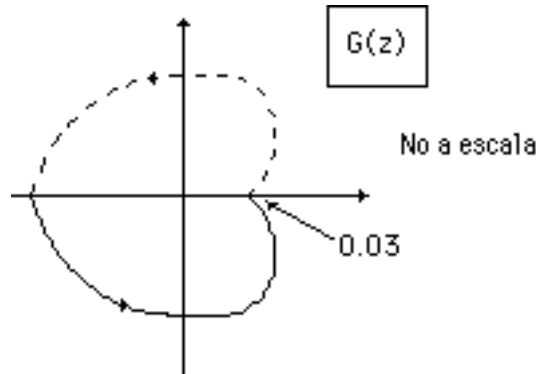
- a) Con $T=0.04$ sg y $K_D=1$, encontrar el margen de K_P para la estabilidad.
- b) Repetir el apartado (a) con $K_D=0$, es decir, sin realimentación analógica.



44.- Dado el siguiente sistema y su diagrama de Nyquist para una cierta ganancia K. Determinar si el sistema es estable para este valor de K.



(a)



(b)

45.- Para el sistema de control de marcha para un automóvil, véase problema 36, con $D(z)=K$, es decir con un controlador digital proporcional, y período de muestreo $T=0.2$ sg se obtiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$\overline{GH}(z) = 0.03 K \frac{0.1183 z + 0.1092}{z^2 - 1.7795 z + 0.7866}$$

- a) Dibujar el diagrama de Nyquist, con $K=1$. Determinar los márgenes de ganancia y de fase. Comparar el margen de ganancia con el margen de estabilidad obtenido en el apartado (a) del problema 42.
- b) Dibujar el diagrama de Bode para este sistema, con $K=1$. Determinar los márgenes de ganancia y de fase. Comparar los resultados con los obtenidos en el apartado anterior.
- c) ¿Qué frecuencia tendría la oscilación mantenida de la respuesta del sistema?

46.- Sea el sistema con función de transferencia pulsada en lazo abierto dada por

$$G(z) = \frac{4(z+1)^2}{(z-1)(3z+1)}$$

Sabiendo que el período de muestreo es $T=2$ sg. Diseñar una compensación en serie de manera que se cumplan las siguientes especificaciones:

- 1ª. Coeficiente estático de error de velocidad, $K_v=10$ sg^{-1}
- 2ª. Margen de fase $\geq 50^\circ$
- 3ª. Margen de ganancia ≥ 10 dB.

47.- Para el sistema de control de marcha para un automóvil, véase problema 36, con período de muestreo $T=0.2$ sg se obtiene la siguiente función de transferencia en lazo abierto:

$$\overline{GH}(z) = 0.03 D(z) \frac{0.1183 z + 0.1092}{z^2 - 1.7795 z + 0.7866}$$

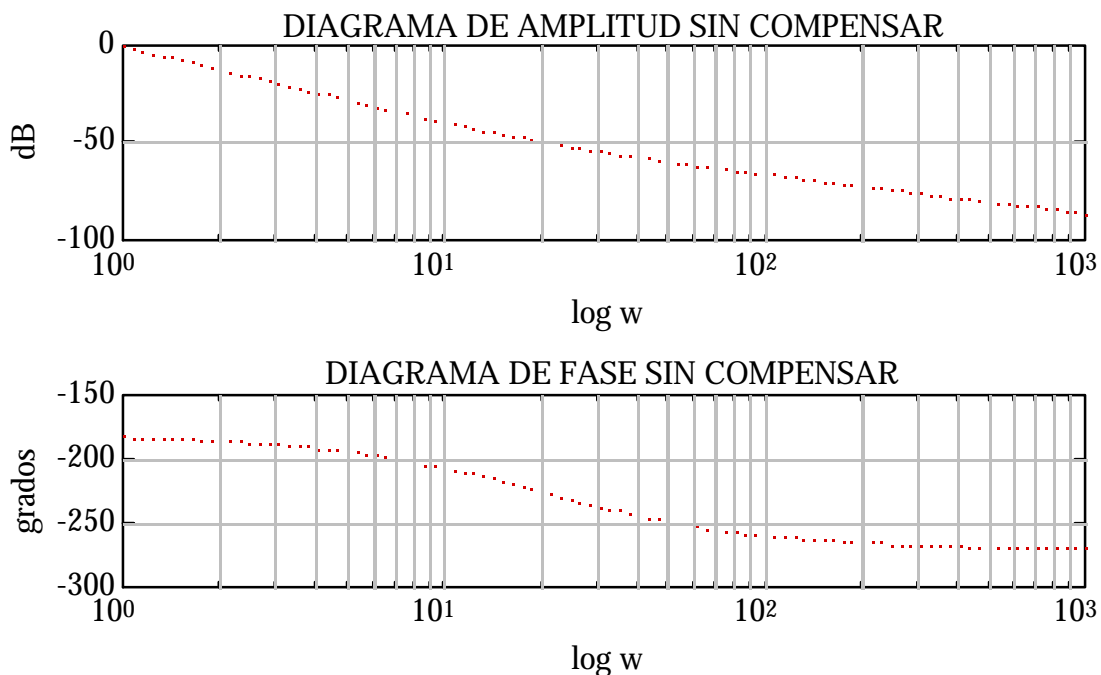
- a) Encontrar el valor de $D(z)=K$ que da un error del 3% para una entrada en escalón. ¿Es el sistema estable para este valor de K ?
- b) Diseñar un compensador en retardo de fase para que el error estacionario sea del 3%, el margen de fase mayor que 45° , y el margen de ganancia mayor de 10 dB. Obtener la función de transferencia total del compensador. Se recomienda en este apartado tomar como punto de partida el diagrama de Bode obtenido en el problema 45.

48.- Para el mismo sistema del problema anterior. Diseñar un controlador PI para obtener un margen de fase de 45° y un margen de ganancia mayor de 8 dB. ¿Cuál es el error estacionario en este caso?.

49.- El siguiente diagrama de Bode en $G(w)$ corresponde a la función de transferencia discretizada del doble integrador con periodo de muestreo $T=0.1$, dada por

$$G(z) = 0.005 \frac{z+1}{(z-1)^2} \leftrightarrow G(w) = \frac{1 - \frac{w}{20}}{w^2}$$

- a) Diseñar un compensador en avance de fase para conseguir un margen de fase de 50° a la frecuencia $\omega_c=4$.
- b) Trazar el diagrama de Bode aproximado del compensador.
- c) Comprobar, por la ecuación característica, que el sistema en lazo cerrado es estable.

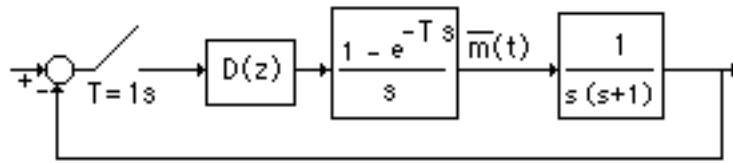


50.- Considérese el sistema de la figura, con un factor de ganancia K añadido en el numerador.

- a) Utilizando la técnica del lugar de las raíces, encontrar el valor de K que da amortiguamiento crítico al sistema.
- b) Determinar la constante de tiempo asociada a las raíces del apartado (a).
- c) Diseñar un compensador en retardo de fase tal que duplicando el valor de la ganancia del apartado (a), se obtenga un amortiguamiento crítico, con raíces teniendo aproximadamente la misma constante de tiempo que en el apartado (b).

Enunciados

d) Diseñar un compensador en avance de fase tal que se obtenga un amortiguamiento crítico, con raíces cuya constante de tiempo sea aproximadamente la mitad que en el apartado (b).



51.- Considérese el caso de los zorros y conejos de Australia. El número de conejos es x_1 y si se dejarán solos crecerían indefinidamente (hasta que el suministro de alimentos se agotara), de forma que

$$\dot{x}_1 = a x_1$$

Sin embargo, con los zorros que hay en el continente, se tiene que

$$\dot{x}_1 = a x_1 - b x_2$$

donde x_2 es el número de zorros. Si suponemos que los zorros deben tener conejos para sobrevivir.

$$\dot{x}_2 = c x_1 - d x_2$$

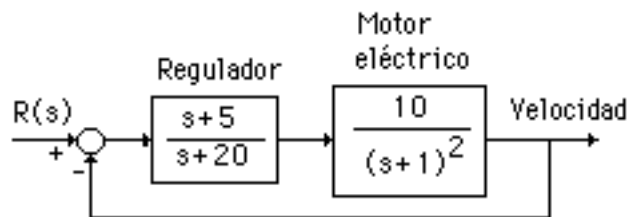
¿Cuáles son los requisitos sobre a, b, c y d para que el sistema sea estable?.

52.- Sea el sistema dinámico discreto $y(k+2) = 2 y(k+1) - y(k) + u(k)$.

a) Obtener una representación en variables de estado.

b) Determinar el valor de los estados para $k=3$, siendo $y(1)=0, y(2)=1, u(1)=1, u(2)=-1$.

53.- Los automóviles impulsados por medios eléctricos representan un potencial social importante. Un vehículo de este tipo, que utiliza un microprocesador para el control del motor y su diagnóstico, tiene un alcance medio de 120 km y puede viajar hasta a 80 km/h en una pendiente del 5%. En la figura se muestra el diagrama de bloques del sistema de control de su motor. a) Obtener un diagrama de bloques en forma canónica controlable del sistema, b) ¿Cuál es su matriz de transición $\phi(t)$?, c) ¿Es estable este sistema?.



54.- Encontrar la función de transferencia $Y(z)/U(z)$ para el siguiente sistema.

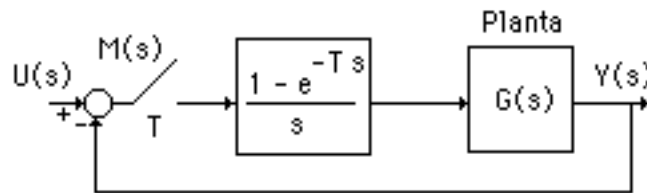
$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \end{bmatrix} x(k)$$

55.- La planta del siguiente diagrama de bloques viene descrita mediante la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 0.2 \frac{dy}{dt} + 0.02 y = \bar{m}(t)$$

- a) Encontrar un modelo de estados discreto para el sistema en lazo abierto, con: $T=2sg$, y como primer estado, y y como segundo estado, dy/dt como segundo estado, y $m(k)$ como señal de entrada.
- b) Encontrar un modelo de estados discreto para el sistema en lazo cerrado, con el mismo T y la misma elección de variables de estado que el apartado anterior.

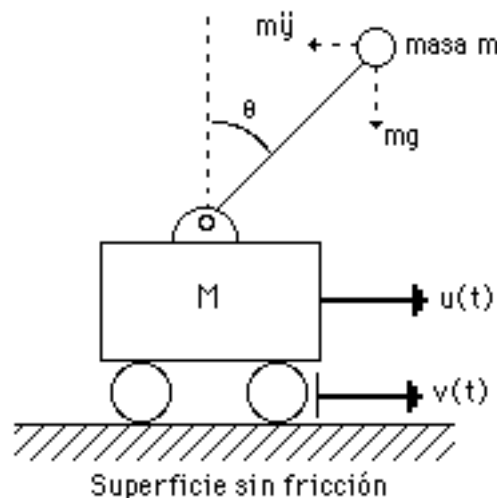


56.- Equilibrar un palo de escoba en el extremo de un dedo es semejante al problema de controlar la posición de un proyectil durante las etapas iniciales de lanzamiento. Este es el problema clásico y fascinante del péndulo invertido montado en un carrito, como se muestra en la figura. El carrito debe moverse, aplicando una fuerza $u(t)$, de forma que la masa esté siempre en posición vertical. Suponiendo que $M \gg m$ y que el ángulo de rotación θ es pequeño, a) determinar las ecuaciones que describen el sistema en el espacio de estados

$$(x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4) = (y \ \dot{y} \ \theta \ \dot{\theta})$$

- b) Para estabilizar al sistema se utiliza una señal de control combinación lineal de las variables de estado x_3 y x_4 . Determinar las condiciones que deben cumplir k_1 y k_2 en función de los parámetros del sistema para que el sistema sea estable.

$$u(t) = k_1 x_3(t) + k_2 x_4(t)$$



57.- Dado el sistema discreto, descrito por la siguiente ecuación de estados

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.16 & -1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k)$$

- a) Determinar el vector de ganancias necesario para que los polos del sistema en lazo cerrado se sitúen en $z = 0.5 \pm 0.5j$.
 b) Comprobar que la realimentación de estados con

$$K = [-0.16 \quad -1]$$

da lugar a respuesta plana (se dice que un sistema tiene respuesta plana cuando todos los polos del sistema están situados en el origen).

- c) ¿Cómo evoluciona el sistema con la realimentación del apartado (b) a partir de cualquier estado?

58.- Dado el siguiente sistema discreto, correspondiente a la discretización del doble integrador ($1/s^2$),

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = [1 \quad 0] x(k)$$

Diseñar un observador completo de estados, tal que el error en la estimación de estados tenga respuesta plana.

59.- Dado el sistema

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \quad 0 \quad 0] x(t)$$

- a) Determinar el vector de realimentación de estados que sitúa todos los polos del sistema en lazo cerrado en $s=-1$.
 b) Determinar un observador de orden reducido con todos sus polos en $s=-2$.
 c) Dibujar el diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado, que combine el observador con la realimentación de estados determinada en el apartado (a).

60.- Sea el mismo sistema de control del problema 43.

- a) Obtener un modelo discreto en el espacio de estados (posición angular, velocidad angular) para $G_p(s)$.
 b) Se desea reemplazar la actual estrategia de control, constituida por dos lazos de realimentación, por una realimentación de variables de estado. Encontrar la matriz de ganancias para conseguir la siguiente ecuación característica $z^2 - 1.9802z + 0.9802 = 0$.
 c) Suponer que $\theta(t)$ es la única señal medida. Diseñar un observador de orden reducido para el sistema.
 d) Determinar el filtro digital $D(z)$ equivalente y comprobar si se trata de una compensación por adelanto o por retardo de fase.