

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA**

**COLECCIÓN DE EJERCICIOS**

**Asignatura: INGENIERÍA DE SISTEMAS**

**Revisión: Noviembre de 1998**

**Autores:**

**Fernando Morilla García**

**Sebastián Dormido Canto**

**DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA Y AUTOMÁTICA  
FACULTAD DE CIENCIAS**

## **Presentación.**

Esta colección de ejercicios tiene como objetivo servir de complemento al libro de J. Aracil y F. Gordillo “Dinámica de Sistemas” para el estudio de la asignatura “Ingeniería de Sistemas”, ya que éste carece de ejercicios propuestos y resueltos. Para su elaboración se ha utilizado principalmente este libro pero también el libro de J. Aracil “Introducción a la dinámica de sistemas” y otros textos de la bibliografía complementaria, concretamente los de S. Martínez y A. Requena “Dinámica de sistemas: Vol. 1 y 2”.

La colección incluye los enunciados de 20 ejercicios, ordenados según el temario, y sus correspondientes resoluciones, pero además incluye dos propuestas de ejercicios (no resueltos) basados en el estudio más completo de un modelo. Estos dos ejercicios son ejemplos del tipo de ejercicio práctico que se pueden plantear en las pruebas presenciales con una puntuación de 5 puntos.

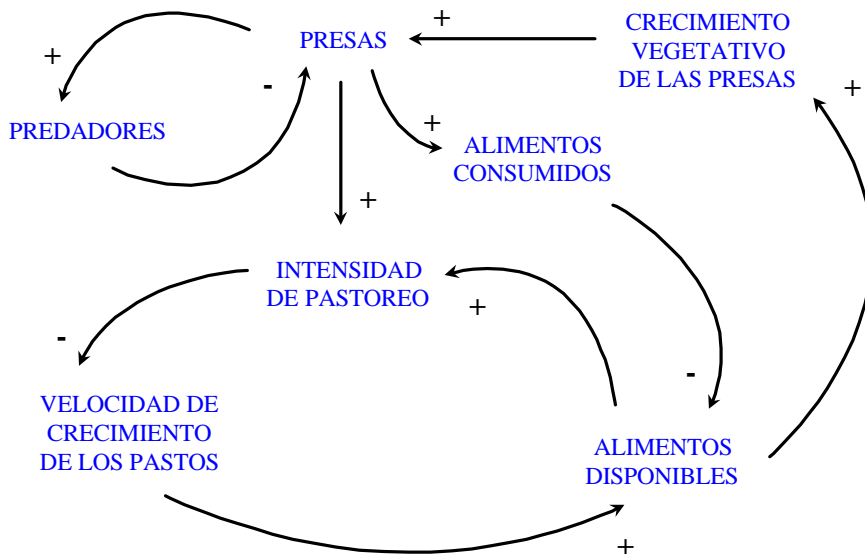
Como recomendaciones generales, se aconseja al alumno que: 1<sup>a</sup>) no consulte la solución de un ejercicio hasta no haberlo trabajado suficientemente, 2<sup>a</sup>) ante cualquier duda consulte el libro de J. Aracil y F. Gordillo o se dirija al tutor o a los profesores de la asignatura, 3<sup>a</sup>) trate de resolver los ejercicios propuestos cuando haya completado la visión general de la asignatura y envíe su resolución al tutor o a los profesores de la asignatura para que se los corrija.

En beneficio de todos y para futuras revisiones, les agradecemos que cualquier errata que detecten en la colección nos sea comunicada.

Fernando Morilla García      Sebastián Dormido Canto

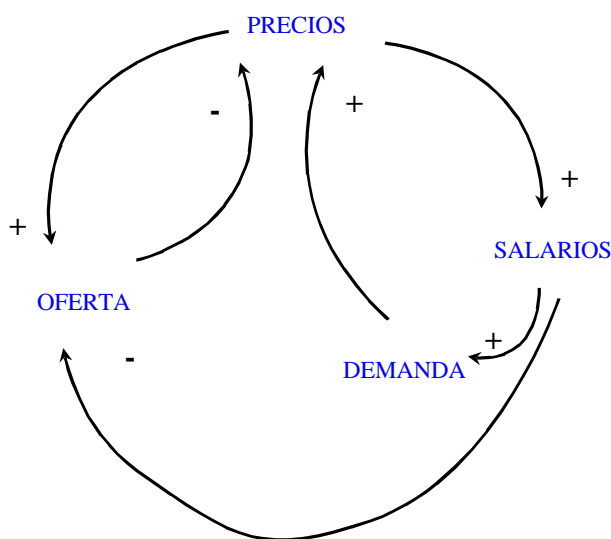
Madrid, Noviembre 1998

1.- La figura 1 es una representación muy simplificada de un sistema ecológico. Analizar de forma cualitativa la estabilidad de cada uno de los bucles y del sistema en su conjunto.



**Figura 1** Diagrama de influencias de un sistema ecológico.

2.- Dado el diagrama de influencias de la figura 2, ¿se puede extraer alguna conclusión sobre el comportamiento de cada uno de los bucles?, ¿y sobre el comportamiento global del sistema?



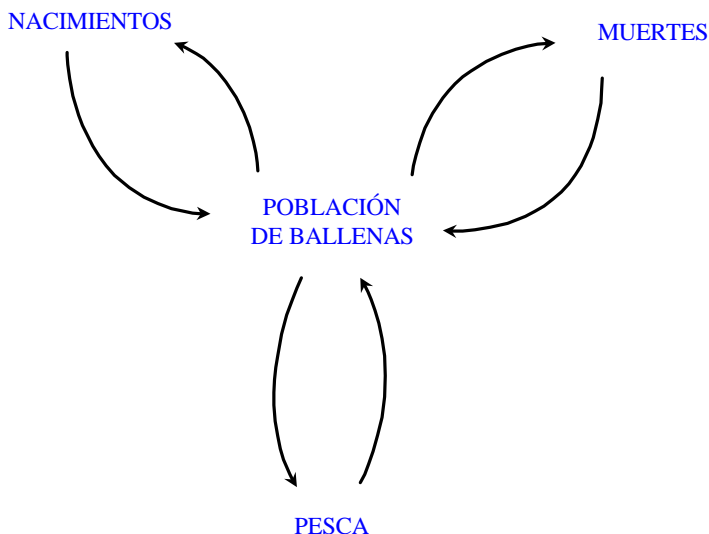
**Figura 2** Diagrama de influencias de un sistema socio-económico.

3.- Dibujar un diagrama de influencias para el siguiente enunciado: "Cuando el precio de las patatas sube, aumenta la producción de este tubérculo. Esto, a su vez, supone una caída del precio".

Sugerencia: Introduzca la variable exógena precipitaciones o lluvia, como causante parcial de una mayor o menor producción.

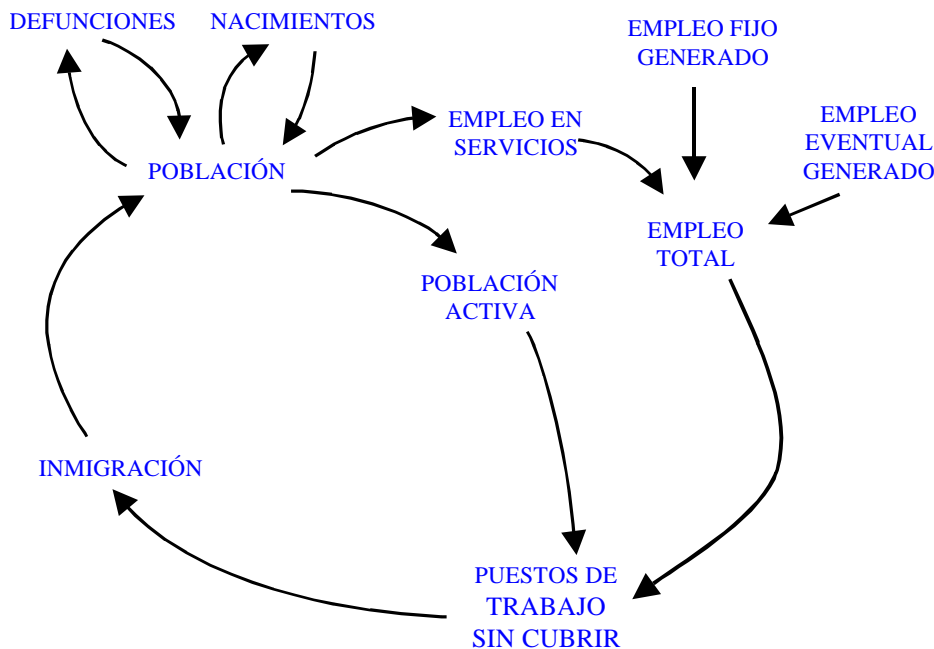
4.- Construya un diagrama de influencias con los siguientes elementos del sistema ciudad: población, contaminación, tráfico, automóviles, calidad de vida, ruidos, habitabilidad, atracción de población, repulsión de población y otros que usted considere necesarios u oportunos.

5.- En el diagrama de influencias de la figura 3, correspondiente a un modelo de población de ballenas, faltan por incluir los signos de todas las relaciones. Se pide completar el diagrama, justificando de forma cualitativa cada uno de los signos.



**Figura 3** Diagrama de influencias en una población de ballenas.

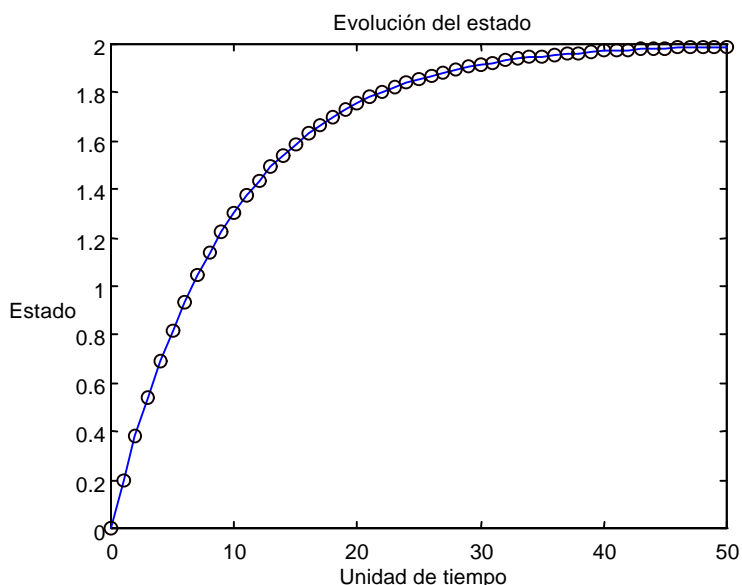
6.- En el diagrama de influencias de la figura 4 faltan por incluir los signos de todas las relaciones. Se pide completar el diagrama, justificando de forma cualitativa cada uno de los signos, así como analizar la estabilidad de cada uno de los bucles y del sistema en su conjunto.



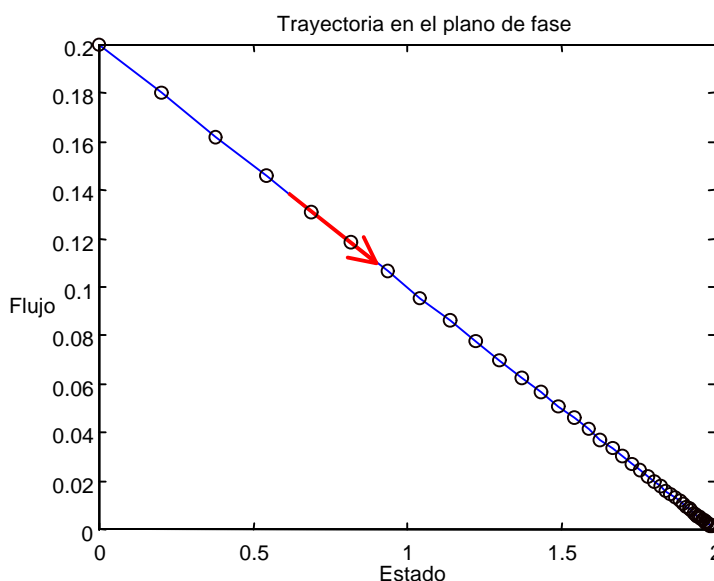
**Figura 4** Diagrama de influencias entre la población y el empleo.

7.- Las figuras 5 y 6 muestran respectivamente la evolución del estado y la relación entre el flujo y el estado (trayectoria en el plano de fase) de un bucle elemental de realimentación negativa. En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos. Se pide determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada:

- El valor del objetivo  $x_d$ .
- El valor de la fracción por unidad de tiempo  $k$ .
- La constante de tiempo del sistema ( $1/k$ ), expresada en unidades de tiempo.
- La vida media del sistema ( $0.7/k$ ), expresada en unidades de tiempo.



**Figura 5** Evolución del estado de un bucle elemental de realimentación negativa.

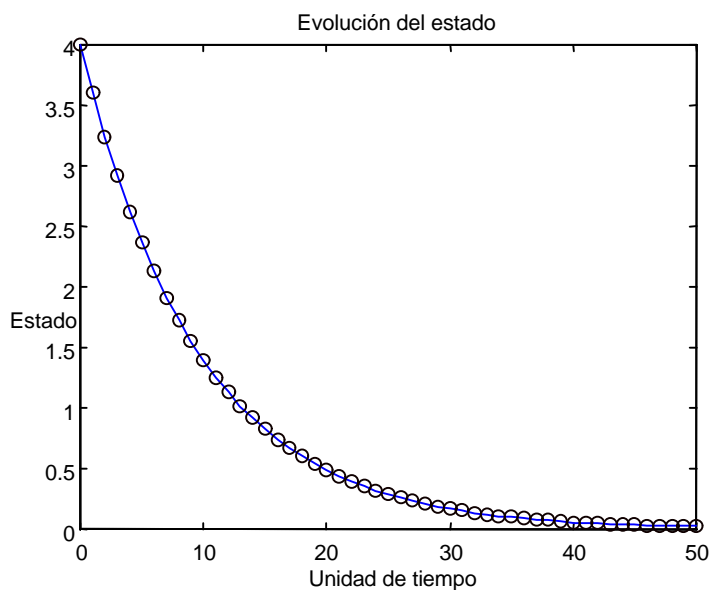


**Figura 6** Trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación negativa.

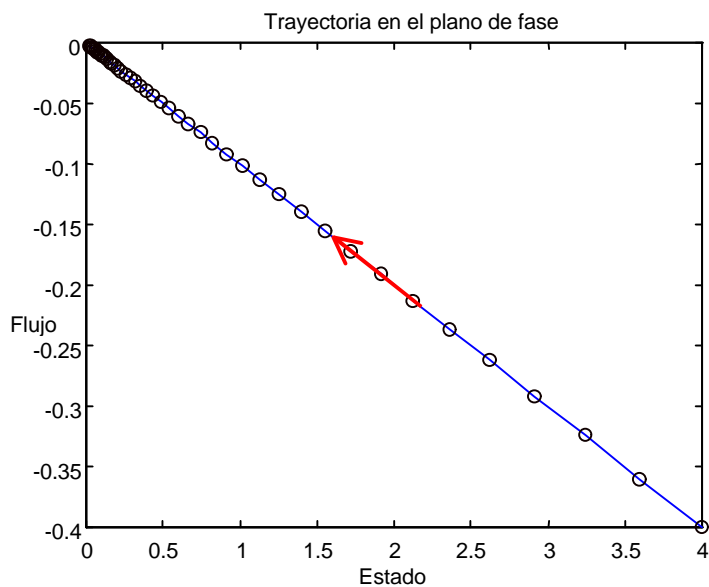
8.- Las figuras 7 y 8 muestran respectivamente la evolución del estado y la trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación negativa. En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos. Se pide determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada:

- El valor del objetivo  $x_d$ .
- El valor de la fracción por unidad de tiempo  $k$ .
- La constante de tiempo del sistema ( $1/k$ ), expresada en unidades de tiempo.
- La vida media del sistema ( $0.7/k$ ), expresada en unidades de tiempo.

¿Qué diferencias encuentra respecto al sistema del ejercicio anterior?

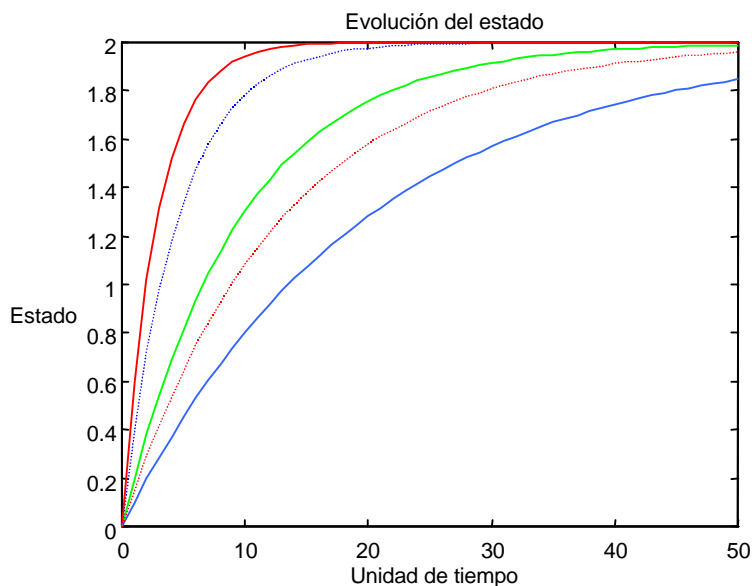


**Figura 7** Evolución del estado de un bucle elemental de realimentación negativa.



**Figura 8** Trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación negativa.

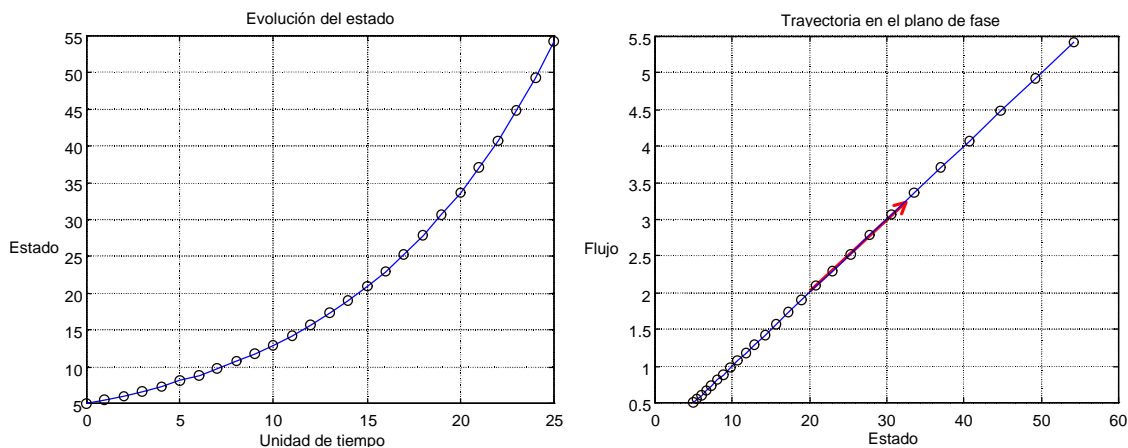
9.- La figura 9 muestra la evolución del estado de varios bucles elementales de realimentación negativa. ¿Qué diferencia encuentra entre ellos y a qué parámetro de esta estructura elemental se debe dicha diferencia de comportamiento?



**Figura 9** Evolución del estado de varios bucles elementales de realimentación negativa.

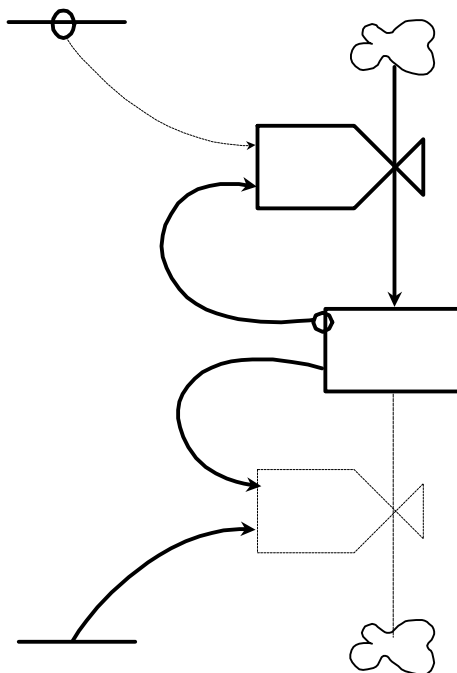
10.- La figura 10 muestra la evolución del estado y la trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación positiva. En ambas gráficas están indicados, mediante círculos, los valores de las variables en cada unidad de tiempo y se incluye con trazo continuo la unión de todos ellos.

- a) Determinar sobre ambas gráficas o sobre la gráfica más adecuada:
  - El valor de la tasa de crecimiento  $k$ .
  - El tiempo de duplicación ( $0.7/k$ ), expresado en unidades de tiempo.
- b) Si lo que se quiere representar con este modelo es el crecimiento que experimenta una bola de nieve al rodar sobre una superficie nevada, ¿cuál sería la variable de estado? y ¿de qué dependería la tasa de crecimiento?



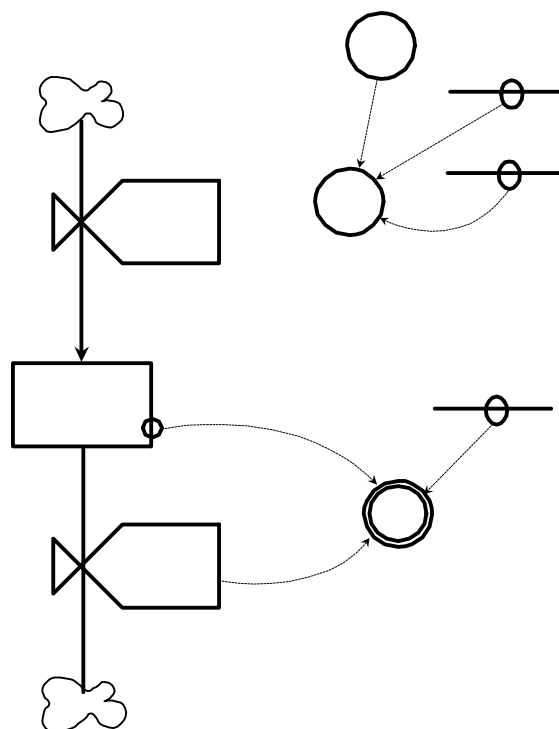
**Figura 10** Evolución del estado y trayectoria en el plano de fase de un bucle elemental de realimentación positiva.

11.- En el diagrama de la figura 11 además de no incluir las variables se han cometido intencionadamente una serie de errores al no respetar la simbología propuesta por Forrester, ¿cuáles son estos errores?



**Figura 11** Diagrama de Forrester con errores.

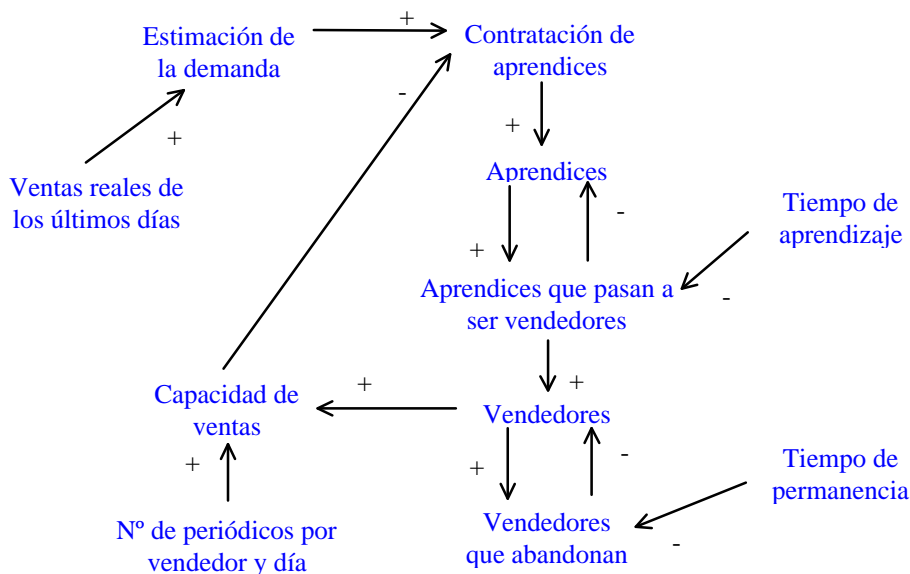
12.- Dado el diagrama de la figura 12, ¿por qué razones no es correcto?



**Figura 12** Diagrama de Forrester incorrecto.

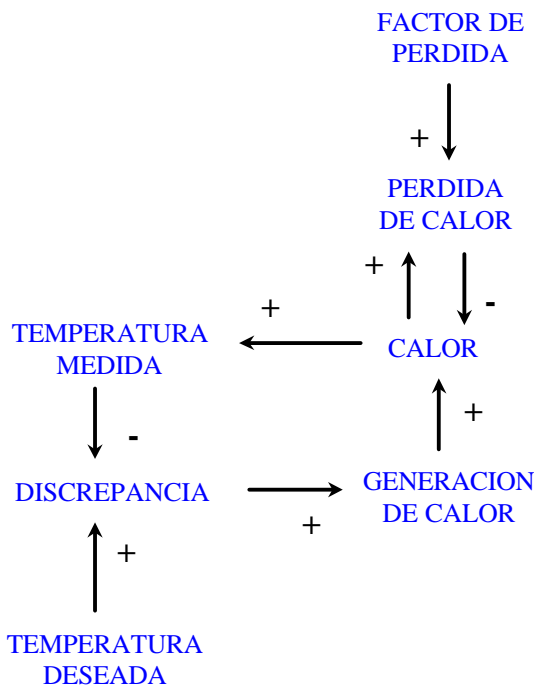
13.- El editor de un periódico tiene un problema logístico, desea mantener un número de vendedores que le garanticen las ventas y unos beneficios razonables. Para analizar el problema de contratación ha construido el diagrama de influencias de la figura 13. Se pide pasar al correspondiente diagrama de Forrester, acompañándolo de aquella información o aclaración que considere oportuna.





**Figura 13** Diagrama de influencias en un modelo de contratación.

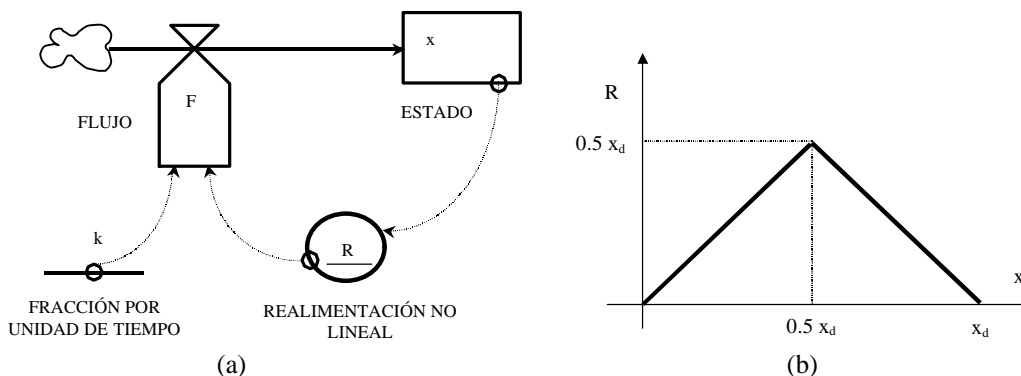
14.- El diagrama de influencias de la figura 14 representa un sistema de regulación de temperatura por medio de un termostato, que acciona o detiene el funcionamiento de una fuente de calor. Dibujar el diagrama de Forrester asociado.



**Figura 14** Diagrama de influencias de un sistema de regulación de temperatura.

15.- a) Justificar que una estructura elemental como la de la figura 15a puede dar lugar a un crecimiento sigmoïdal si la función no lineal situada en la realimentación tiene la forma de la figura 15b.

b) Comprobarlo mediante simulación en las siguientes condiciones:  $x_d=5$ ,  $k=0.1$ ,  $x(0)=0.1$ ,  $\Delta t=1$ , para un tiempo de simulación de 70 unidades de tiempo.



**Figura 15** a) Diagrama de Forrester de un bucle elemental con realimentación no lineal. b) Caso particular de realimentación no lineal que da lugar a crecimiento sigmoidal.

16.- La figura 16 muestra como se propaga una epidemia sobre una población total (P) de 500 personas a partir de una persona enferma (PE(0)=1). El modelo empleado es el del apartado 4.4 del libro de J. Aracil y F. Gordillo, descrito por las siguientes ecuaciones

$$\frac{d PE(t)}{dt} = FC(t)$$

$$FC(t) = CPI \cdot PCD \cdot PS(t) \cdot PE(t)$$

$$PS(t) = P - PE(t)$$

considerando que:

- La unidad de tiempo es el día.
- El porcentaje de contactos diarios (PCD=0.02) es del 2%.
- Un 5% de los contactos producen infección por día (CPI=0.05).

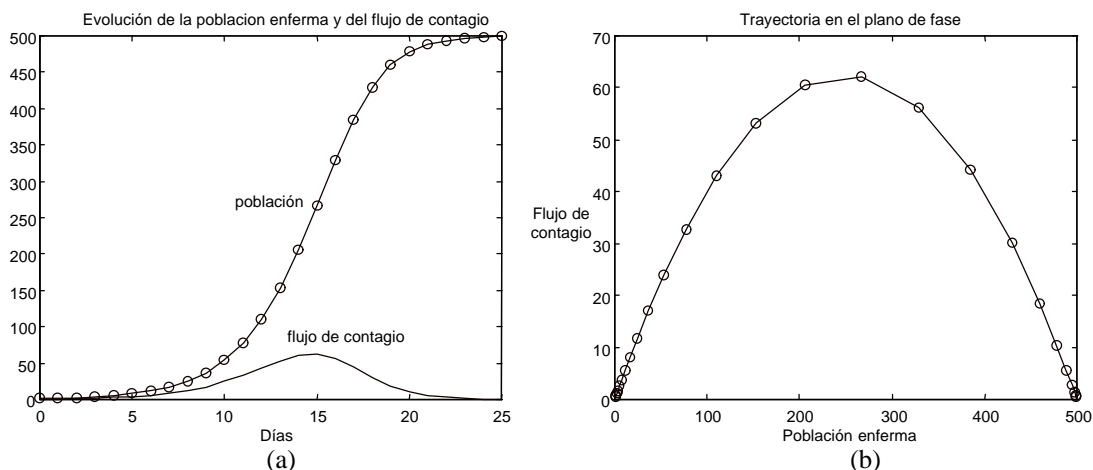
a) Se pide que el alumno trate de reproducir estas gráficas mediante un programa en computador que simule el comportamiento del modelo. En caso de no disponer del computador y de un lenguaje de programación, se pide que el alumno compruebe, mediante calculadora, que los diez primeros valores de las variables PE (población enferma) y FC (flujo de contagio) son respectivamente:

Día	Población enferma	Flujo de contagio
0	1.0000	0.4990
1	1.4990	0.7473
2	2.2463	1.1181
3	3.3643	1.6708
4	5.0352	2.4922
5	7.5274	3.7070
6	11.2345	5.4910
7	16.7255	8.0830
8	24.8085	11.7888
9	36.5973	16.9593

cuando la ecuación diferencial se ha integrado por el método de Euler, es decir, se ha sustituido por esta otra

$$PE(t+\Delta t) = PE(t) + \Delta t FC(t)$$

b) Los valores y las gráficas del apartado (a) se han obtenido considerando que el flujo de contagio por día es un número real. ¿Qué ocurre si en este modelo se añade como hipótesis adicional que el número de personas que dejan de estar sanas y pasan a estar enfermas tiene que ser un número entero? ¿Se obtienen resultados realistas? ¿Serviría esta hipótesis en otras condiciones iniciales, por ejemplo con  $PE(0)=5$ ?

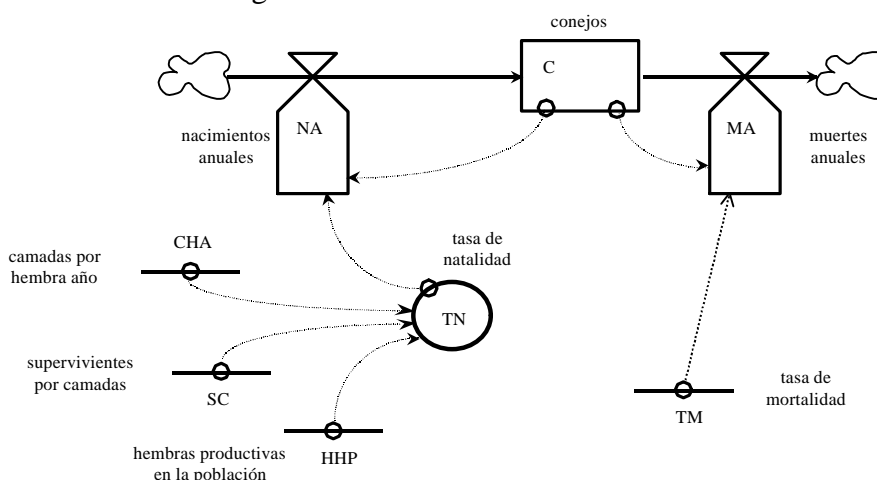


**Figura 16** a) Evolución de la población enferma y del flujo de contagio en el modelo del proceso de difusión de una epidemia. b) Trayectoria en el plano de fase.

17.- Con las siguientes hipótesis sobre una población de conejos:

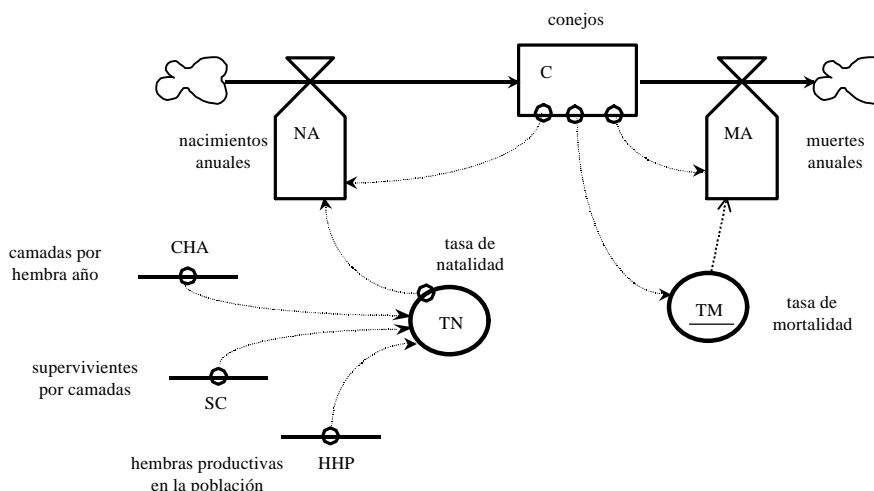
- El número de camadas por hembra y año es dos.
- El número de conejos supervivientes por camada es cuatro.
- El 10% de la población son hembras productivas.
- La tasa de mortalidad en los conejos es del 50%.

se ha construido el modelo de la figura 17a.

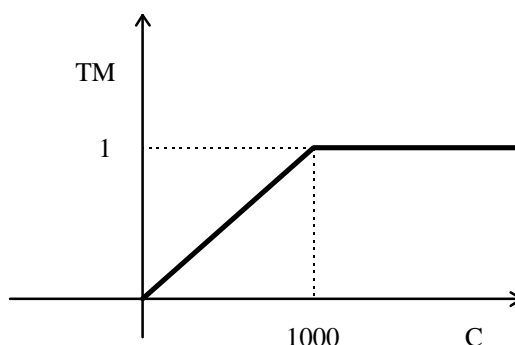


**Figura 17a** Diagrama de Forrester de un modelo simple de evolución de una población de conejos.

- a) Expresar el valor y unidades de cada una de las variables del modelo y proponer el conjunto de ecuaciones que puedan describirlo.
- b) Comprobar y justificar razonadamente que, independientemente de la población inicial de conejos, el modelo predice una explosión demográfica, es decir, que la población crecerá indefinidamente.
- c) En el modelo de la figura 17b, que es un modelo mejorado respecto al de la figura 17a, se supone que la tasa de mortalidad es una función no lineal de la población como se muestra en la figura 17c. Esta hipótesis sobre la tasa de mortalidad es más realista, refleja que si la población de conejos está confinada en un espacio reducido, el aumento del número de conejos provocará un aumento lineal de la tasa de mortalidad, pero también refleja que a partir de un determinado número de conejos, concretamente 1000, la tasa de mortalidad alcanza su máximo valor (la unidad) y la población tiene pocas posibilidades de supervivencia. Con los mismos datos del apartado (a) y esta modificación en la tasa de mortalidad, comprobar y justificar razonadamente que, independientemente de la población inicial de conejos, se alcanzará un estado de equilibrio. ¿Qué valor de población corresponde a ese estado de equilibrio?



**Figura 17b** Diagrama de Forrester de un modelo más realista de evolución de la población de conejos.



**Figura 17c** Representación gráfica de la función no lineal  $TM = f(C)$ .

- d) Mediante un programa en computador o con una calculadora, comprobar que en las condiciones del apartado (c) se obtienen los siguientes resultados a partir de una población inicial de 100 conejos y con redondeo a números enteros en ambos flujos:

Año	Población de conejos	Flujo de nacimientos	Flujo de muertes
0	100	80	10
1	170	136	29
2	277	222	77
3	422	338	178
4	582	466	339
5	709	567	503
6	773	618	598
7	793	634	629
8	799	638	637
9	799	639	638
10	800	640	640

18.- La figura 18 muestra la evolución de las variables del modelo de la figura 4.15 del libro de J. Aracil y F. Gordillo. Sabiendo que:

- El modelo está descrito por las ecuaciones

$$\frac{d A(t)}{dt} = P(t) - V(t)$$

$$P(t) = E(t) PD$$

$$\frac{d E(t)}{dt} = C(t)$$

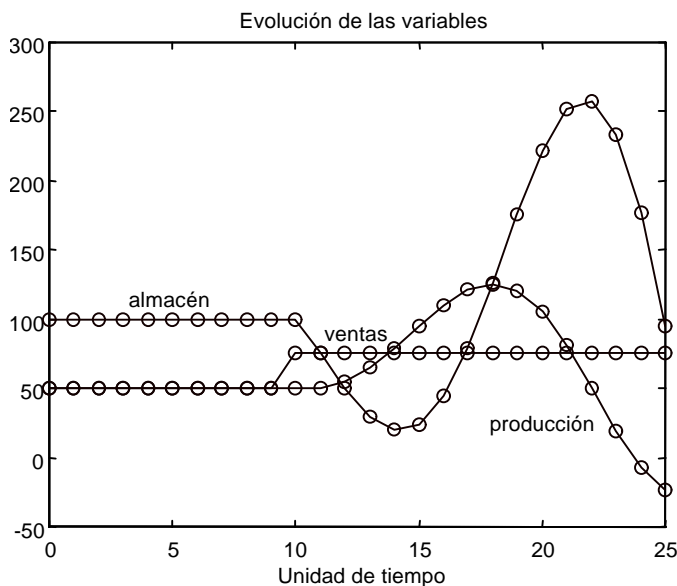
$$C(t) = \frac{AD - A(t)}{TAE TAA PD}$$

- La productividad por empleado es de 10 piezas por semana; PD=10 piezas/(empleado semana).
- El tiempo de ajuste del almacén es de 1 semana; TAA=1 semana.
- El tiempo de ajuste del empleo es de 5 semanas; TAE=5 semanas.
- Las dos ecuaciones diferenciales se han integrado por el método de Euler con  $\Delta t=1$  semana.

a) Comprobar que los valores de producción y ventas de 50 unidades son compatibles con un valor deseado del almacén de 100 unidades, como puede observarse en los primeros días de la gráfica.

b) Comprobar que el cambio brusco en las ventas, que tiene lugar el décimo día, provoca una situación inestable en la producción y en el almacén. ¿Por qué los resultados de la figura 18 no coinciden con los que pronostican J. Aracil y F. Gordillo en su libro?

c) ¿Se le ocurre alguna forma de modificar la estructura del modelo para hacerlo estable?



**Figura 18** Evolución en el tiempo de las variables del modelo elemental de interacciones entre el empleo y el almacén de una empresa.

19.- Se pretende estudiar, con un modelo y en simulación, el tiempo de respuesta (TR) de un almacén, medido como el tiempo (en días) transcurrido desde que una determinada pieza es solicitada por el cliente hasta que la petición es satisfecha. El almacén recibe normalmente un número determinado (NPN) de pedidos de material, que de no ser atendidas a su debido tiempo, se irán acumulando. El tiempo de respuesta depende del número de peticiones (PA) que se hayan acumulado en el almacén. A su vez, el tiempo de respuesta se utiliza por la dirección del almacén para medir el porcentaje de satisfacción (CS) de los clientes y decidir, en función de las peticiones acumuladas, si se atienden (satisfacen) un mayor o menor número de peticiones (PS) diarias. La figura 19 muestra el diagrama de influencias del modelo, donde además de las variables (NPN, TR, PA, CS y PS), comentadas anteriormente, aparece una variable auxiliar (NP, nuevas peticiones diarias) que refleja como los pedidos recibidos se convierten en peticiones por día en función del tiempo de respuesta actual del almacén.

Las ecuaciones que definen el modelo son las siguientes:

$$TR(t) = f( PA(t) )$$

$$CS(t) = g( TR(t) )$$

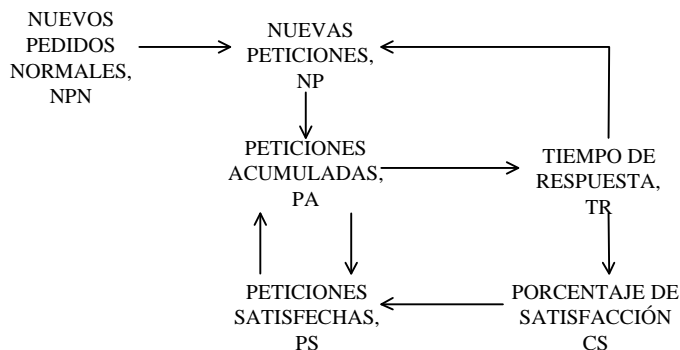
$$NP(t) = \frac{NPN}{TR(t)}$$

$$PS(t) = PA(t) CS(t) / 100$$

$$\frac{d PA(t)}{dt} = NP(t) - PS(t)$$

Donde f y g son dos funciones no lineales (a tramos lineales) descritas en las tablas, y cuyas representaciones gráficas también se acompañan.

- a) Completar el diagrama de influencias con los signos de las relaciones. Se recomienda ayudarse de las ecuaciones del modelo y de las formas de las gráficas, en lugar de hacerlo de forma intuitiva.
  - b) Dibujar el diagrama de Forrester asociado.
  - c) Comprobar, simulando al menos los cinco primeros días con:
    - Un número de peticiones acumuladas inicialmente  $PA(0)$  de 1000 unidades.
    - Un pedido normal (NPN) de 500 unidades.
    - Un intervalo de simulación  $\Delta t$  de 1 día.
- que las variables del modelo presentan un comportamiento oscilante y estable.
- d) ¿Dado que el sistema es de primer orden, a qué se debe el comportamiento oscilante?

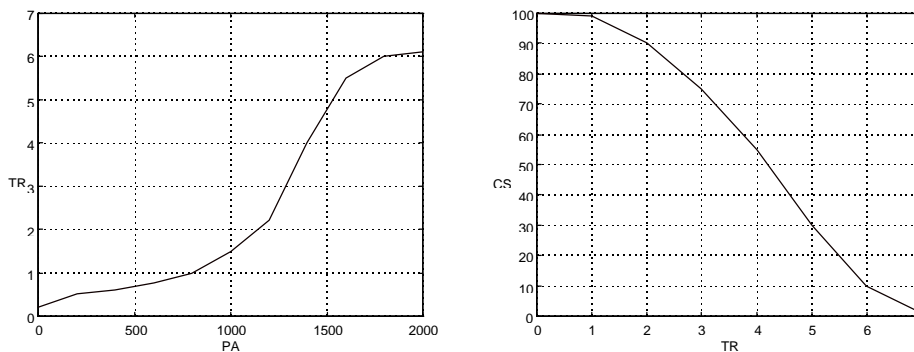


**Figura 19** Diagrama de influencias del modelo de “Almacén”.

PA	TR
0	0.2
200	0.5
400	0.6
600	0.75
800	1.0
1000	1.5
1200	2.2
1400	4.0
1600	5.5
1800	6.0
2000	6.1

TR	CS
0	100
1	99
2	90
3	75
4	55
5	30
6	10
7	1

Presentación tabulada de las funciones no lineales  $TR = f ( PA )$  y  $CS = g ( TR )$ .



Representación gráfica de las funciones no lineales  $TR = f ( PA )$  y  $CS = g ( TR )$ .

20.- El modelo que se presenta, conocido como “inversión insuficiente”, permite analizar la demanda de productos de una empresa, así como el plazo de entrega de los mismos a sus clientes. El modelo está descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d \text{CAP}(t)}{dt} = \text{INV}(t) \qquad \frac{d \text{ORD}(t)}{dt} = \text{NUEORD}(t) - \text{ENT}(t)$$

$$\frac{d \text{DEM}(t)}{dt} = \text{MARK}(t) - \text{DISIP}(t) \qquad \text{NUEORD}(t) = \text{DEM}(t)$$

$$\text{ENT}(t) = \min(\text{CAP}(t), \text{ORD}(t)) \qquad \text{PLENT} = \frac{\text{ORD}(t)}{\text{ENT}(t)}$$

$$\text{DESC}(t) = f(\text{PLENT}(t)) \qquad \text{DISIP}(t) = (0.01 + \text{DESC}(t)) \text{DEM}(t)$$

$$\text{MARK}(t) = 0.1 + \max((\text{DEM}(t) - 2) / 20, 0)$$

en las que intervienen las siguientes variables:

ORD, número de órdenes pendientes  
 NUEORD, nuevas órdenes  
 ENT, entregas  
 CAP, capacidad de producción  
 INV, nuevas inversiones  
 DEM, demanda  
 MARK, marketing  
 DISIP, disipación de la demanda  
 DESC, descontento  
 PLENT, plazo medio de entrega

Y donde  $f$  es una función no lineal descrita por la tabla siguiente

PLENT	DESC
0	0
7	0
8	0.2
10	1

Sobre este modelo existen tres hipótesis diferentes, que afectan únicamente a la variable  $\text{INV}(t)$ , es decir a la política de inversiones (humanas y materiales) que va a adoptar la empresa con el fin de aumentar o disminuir la capacidad de producción.

**Hipótesis 1:** Se opta por una inversión nula. Por tanto el modelo se completa añadiendo al conjunto de ecuaciones anterior esta otra ecuación

$$\text{INV}(t) = 0$$

**Hipótesis 2:** Se decide invertir en la capacidad de producción siempre y cuando el plazo de entrega sea superior a 5 días, con una inversión directamente proporcional a esa



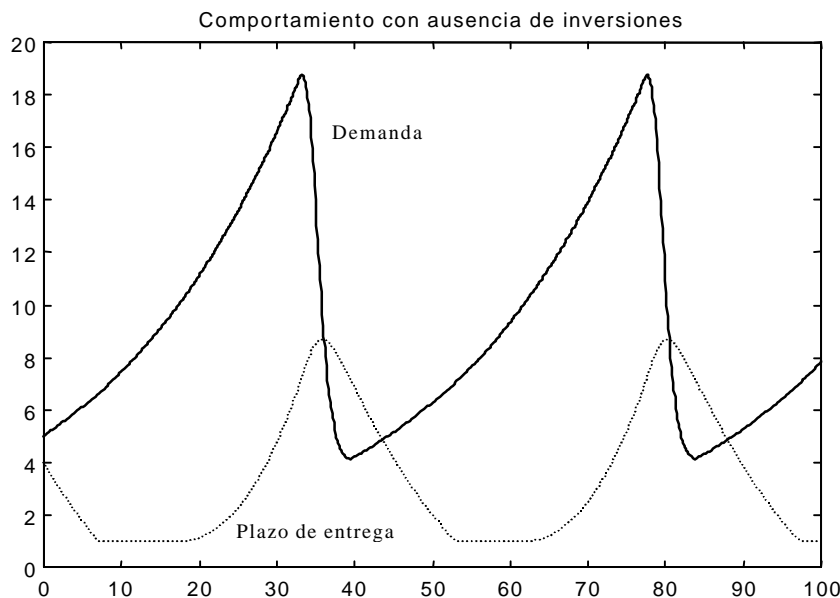
diferencia pero no con carácter inmediato sino con un cierto retraso. Por tanto aparece en el modelo un nuevo parámetro RETINV (retardo en las inversiones) y una nueva ecuación. Concretamente

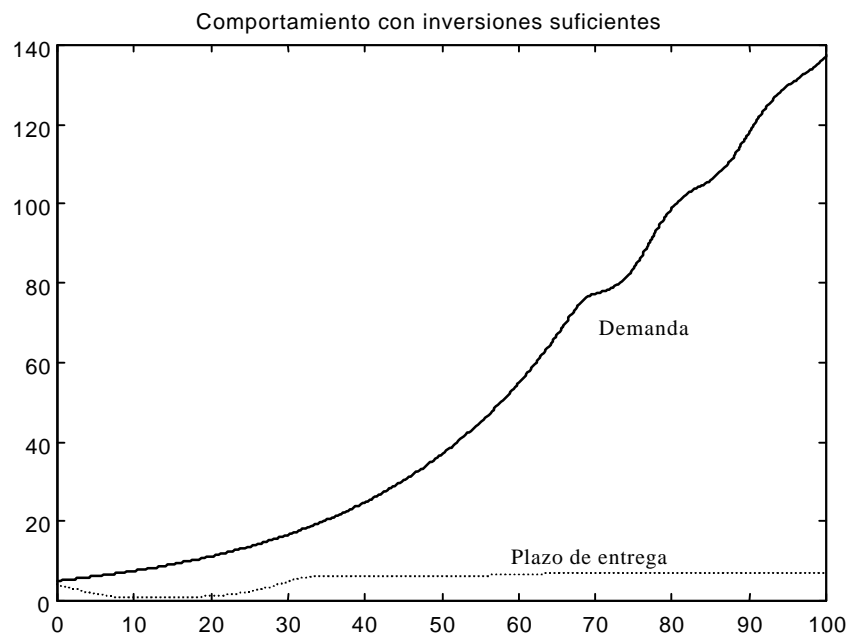
$$INV(t) = \text{delay}(\max(\text{PLENT}(t) - 5, 0), \text{RETINV})$$

**Hipótesis 3:** Se decide invertir de la misma forma que en el caso anterior pero con carácter inmediato. Por tanto aparece en el modelo una nueva ecuación. Concretamente

$$INV(t) = \max(\text{PLENT}(t) - 5, 0)$$

- Hacer una clasificación de las variables del modelo.
- Dibujar el diagrama de Forrester cuando la política de inversión es la de la hipótesis 1, y señalar las modificaciones que hay que introducir en este diagrama para tener en cuenta las hipótesis 2 y 3.
- Indicar la secuencia de cálculo que seguiría para simular este modelo mediante un computador o una calculadora.
- Tratar de reproducir los resultados de las siguientes figuras mediante un programa en un computador sabiendo que se han obtenido partiendo de las condiciones iniciales:  $INV(0)=0$ ,  $CAP(0)=10$ ,  $DEM(0)=5$  y  $ORD(0)=40$ . Utilizando un paso de integración de  $\Delta t=0.1$  día y con un retraso (RETINV) de 5 días en la hipótesis 2. ¿Qué interpretación se puede hacer de los resultados, y qué conclusiones se pueden sacar?





1.- Todos los bucles tienen realimentación negativa, por tanto son estables, y el sistema en su conjunto también lo es.



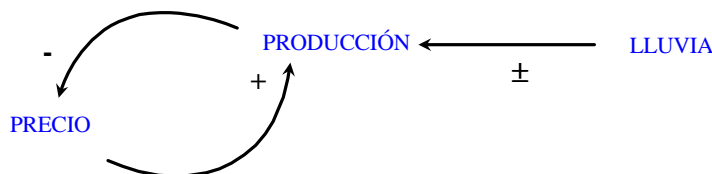
2.- En el sistema se distinguen tres bucles:

precios  $\rightarrow$   $^+$ oferta  $\rightarrow$   $\bar{}$ precios  
 precios  $\rightarrow$   $^+$ salarios  $\rightarrow$   $^+$ demanda  $\rightarrow$   $^+$ precios  
 precios  $\rightarrow$   $^+$ salarios  $\rightarrow$   $\bar{}$ oferta  $\rightarrow$   $\bar{}$ precios

El único bucle que tiene realimentación negativa y por tanto comportamiento estable es el primero. El sistema global tendrá un comportamiento que no se puede predecir.



3.- La solución más simple es el siguiente diagrama de influencias, en el que se ha considerado que la influencia de la lluvia sobre la producción puede ser positiva o negativa. **Justificación:** si no llueve demasiado está claro que un aumento de las lluvias tiene un efecto positivo sobre la producción, es decir se recogen más patatas, pero a partir de una pluviometría óptima también parece claro que el aumento de las lluvias tiene un efecto negativo sobre la producción, es decir las patatas ya no crecen adecuadamente y pueden llegar a pudrirse. Otra posible variable a tener en cuenta es el momento en el que cae la lluvia, pues no tiene el mismo efecto la lluvia que caiga al nacer la patata que la que caiga cuando ésta está a punto de recogerse.



4.- La solución a este ejercicio no es única, a continuación se propone una posible solución. Y estas son las justificaciones a algunas de las relaciones de influencia del diagrama:

1<sup>a</sup>) El aumento de población llevará asociado un aumento de la contaminación, y a su vez como la contaminación es una fuente generadora de enfermedades, puede hacer que la población disminuya.

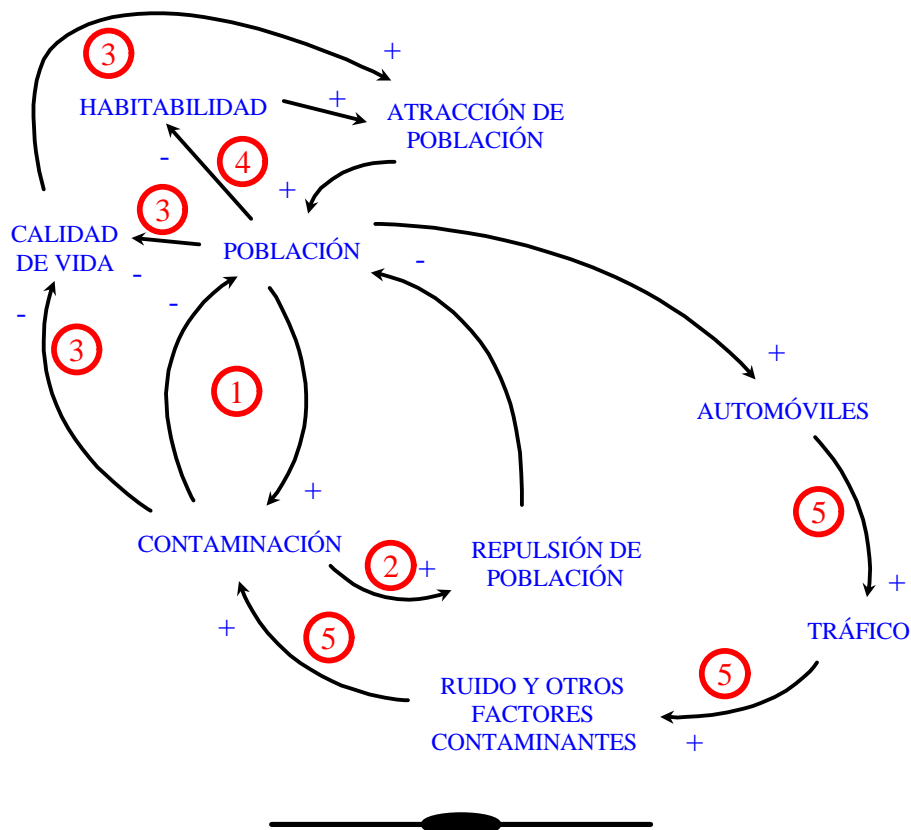
2<sup>a</sup>) El aumento de la contaminación también es una causa probable para que alguna población decida abandonar la ciudad (repulsión de población).

3<sup>a</sup>) La calidad de vida, que es un atractivo para la población, está directamente enfrentada con el aumento de población y de la contaminación.

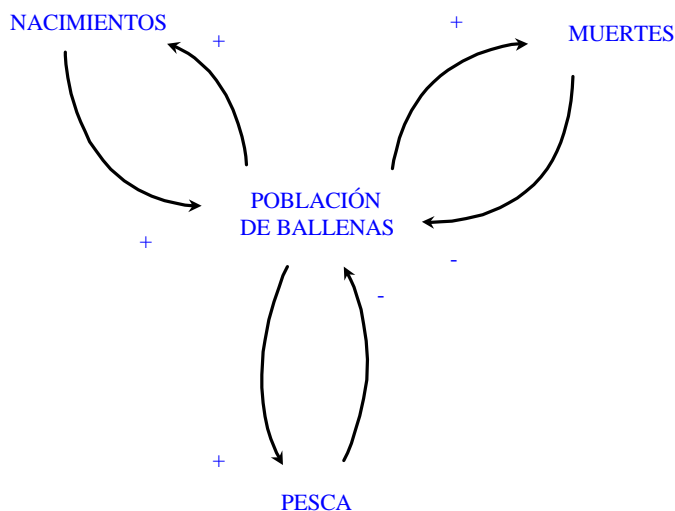
4<sup>a</sup>) La mejora de habitabilidad, que es también un atractivo para la población, está en contraposición con el aumento de población.

5ª) El automóvil mejora la calidad de vida individual, pero es un agente contaminante y que ayuda a aumentar el tráfico, por lo que no favorece la calidad de vida de una ciudad.

En el diagrama se han incluido varios números del 1 al 5 para indicar a que zonas del diagrama afecta cada una de las justificaciones. El resto de las relaciones son tan inmediatas que no necesitan justificación.



5.- A continuación se incluye el diagrama de influencias del problema de las ballenas, con todos los signos entre las relaciones.

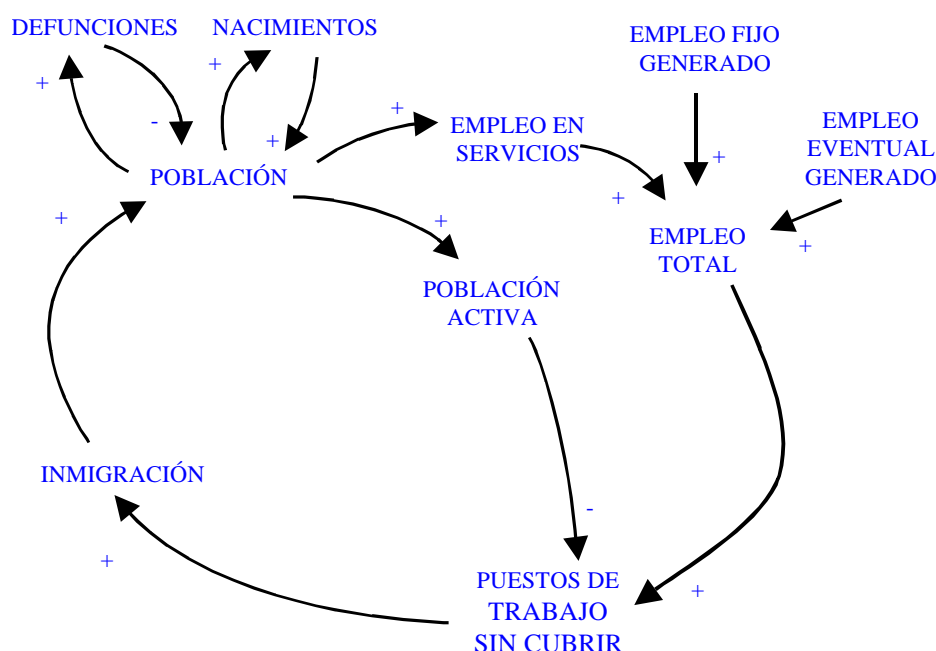


**Justificación:** Todas las relaciones de influencia de este sistema son bastante intuitivas y sus signos son fáciles de determinar. Basta recordar la figura 1.2 del libro de J. Aracil y F. Gordillo.

6.- En este diagrama se recoge la influencia que sobre la evolución demográfica de una población tiene el mercado de trabajo. Esta influencia es positiva, y se manifiesta por un crecimiento de la población debido al flujo de inmigrantes. Según el diagrama, el flujo de inmigración acontece sólo cuando existen puestos de trabajo sin cubrir, por tanto cuanto más puestos de trabajo libres haya más inmigración habrá, de ahí la relación

puestos de trabajo sin cubrir  $\rightarrow$  + inmigración

A su vez, los puestos de trabajo sin cubrir son los que no se cubren por la propia limitación de la población, es decir porque el número de personas en condiciones de trabajar (población activa) es limitada, y vienen generados por distintas causas: el empleo fijo, el empleo eventual y el empleo en servicios a la población. Por tanto no existe ninguna dificultad en completar el diagrama como se muestra a continuación.



La ausencia de otras relaciones de influencia en el diagrama nos permiten pronosticar que se han hecho las siguientes hipótesis en el modelo:

- Los empleos fijos y eventuales se generan como consecuencias de decisiones externas, en principio, independientes de la población.
- Los puestos de trabajo siempre se cubren con la población activa, en la que están integradas tanto las personas que han nacido en el seno de la población como aquellas que se han incorporado a la población a través de la inmigración.

- Siempre que el mercado de trabajo es floreciente (se genera empleo que no se puede cubrir con la población activa) se produce inmigración, pero cuando existe escasez de trabajo no se genera emigración.

En el modelo se pueden observar 4 bucles. Los dos primeros son los básicos en toda población, corresponden respectivamente al bucle de realimentación positiva (por tanto inestable) debido a los nacimientos y al bucle de realimentación negativa (estable) debido a las defunciones. El tercer bucle, si incluye al empleo en servicios, es un bucle de realimentación positiva (inestable). Mientras que el cuarto bucle, que incluye a la población activa, es un bucle de realimentación negativa (estable). El comportamiento del sistema en su conjunto no se puede predecir, aunque es normal que este núcleo de población, salvo recursos limitados (no contemplados en el modelo), tenga un crecimiento sostenido siempre y cuando se mantenga un mercado de empleo fijo y eventual más o menos constante o creciente con la población.



7.- La figura 5 es un caso particular de la figura 2.6 del libro de J. Aracil y F. Gordillo, por tanto el estado parte del valor nulo  $x(0)=0$  y tiende al valor del objetivo  $x_d=2$ . La figura 6 es un caso particular de la figura 2.5, confirmando que el flujo  $F$  en un bucle elemental de realimentación negativa es una función lineal decreciente del estado  $x$ , por tanto también se puede utilizar para determinar el valor del objetivo, como el punto de corte con el eje de abscisas, y el valor de la fracción por unidad de tiempo  $k$ , como la pendiente con signo cambiado, o a partir del punto de corte con el eje de ordenadas. Así pues de los puntos de corte con los ejes se obtienen:

$$x_d = 2 \quad \text{y} \quad k x_d = 0.2 \quad \Rightarrow \quad k = 0.1$$

Mientras que por la pendiente, considerando la trayectoria completa, se tiene que

$$k = - \frac{0.2 - 0}{0 - 2} = 0.1$$

La constante de tiempo del sistema coincide según el enunciado con la inversa de la fracción de tiempo, luego una vez determinado el valor de  $k$  se tiene que  $T = 1/k = 10$  unidades de tiempo. Pero veamos qué significado tiene la constante de tiempo en un bucle elemental de realimentación negativa y cómo se puede determinar de forma gráfica a partir de la figura 5. Según la expresión 2.7 del libro de J. Aracil y F. Gordillo, la trayectoria de un bucle elemental de realimentación negativa se puede describir por la ecuación

$$x(t) = x_d + [x(0) - x_d] e^{-kt}$$

que admite esta otra representación

$$x(t) = x(0) + [x_d - x(0)] (1 - e^{-t/T})$$

Luego en el instante  $t=T$ , es decir transcurrida una constante de tiempo desde el instante inicial, el estado habrá alcanzado el valor

$$x(T) = x(0) + [x_d - x(0)] (1 - e^{-T/T}) = x(0) + [x_d - x(0)] (1 - e^{-1}) = x(0) + [x_d - x(0)] 0.63$$

Puesto que este sistema evoluciona hacia el valor del objetivo  $x_d$ , el resultado anterior quiere decir que transcurrida una constante de tiempo, el estado habrá superado el 63% de la distancia que separa el estado inicial del estado final.

La constante de tiempo de este sistema concreto se puede determinar gráficamente en la figura 5, buscando el instante en el que el estado alcanza el valor

$$0 + [2 - 0] 0.63 = 1.26$$

que resulta ser 10 unidades de tiempo, coincidente con el valor determinado por la relación  $T=1/k$  y utilizando la información de la trayectoria en el plano de fase (figura 6).

De forma análoga, la vida media del sistema coincide según el enunciado con  $0.7/k$ , luego una vez determinado el valor de  $k$  se tiene que  $VM = 0.7/k = 7$  unidades de tiempo. Pero veamos qué significado tiene la vida media en un bucle elemental de realimentación negativa y cómo se puede determinar. Particularizando el estado en el instante  $t=VM$ , se obtiene

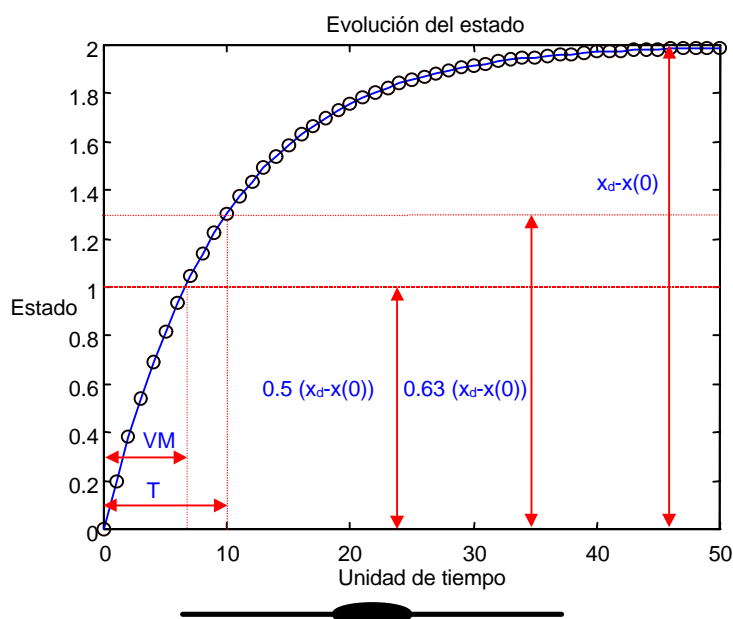
$$x(TM) = x(0.7 T) = x(0) + [x_d - x(0)] (1 - e^{-0.7}) = x(0) + [x_d - x(0)] 0.5$$

es decir que el estado habrá alcanzado el 50% de la distancia que separa el estado inicial del estado final. La vida media de este sistema concreto se puede determinar gráficamente en la figura 5, buscando el instante en el que el estado alcanza el valor

$$0 + [2 - 0] 0.5 = 1$$

que resulta ser 7 unidades de tiempo, coincidente con el valor determinado por la relación  $VM=0.7/k$  y utilizando la información de la trayectoria en el plano de fase (figura 6).

En la siguiente figura se resumen todas las propiedades típicas (anteriormente comentadas) de la trayectoria de un bucle elemental de realimentación negativa, conocido como sistema regulador o estabilizador de primer orden al disponer de una sola variable de estado.



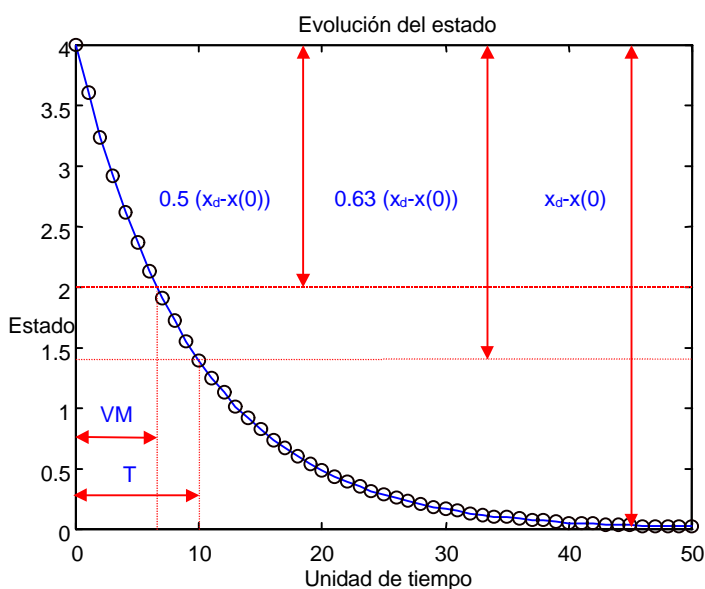
8.- La figura 7 es un caso particular de la figura 2.3b del libro de J. Aracil y F. Gordillo, y la figura 8 es un caso particular de la figura 2.5. La variable de estado evoluciona desde un estado inicial  $x(0)=4$  a un estado final (objetivo)  $x_d=0$  de menor valor que el estado inicial.

Por la pendiente de la trayectoria de fase (figura 8 en este caso), considerando la trayectoria completa, se determina

$$k = - \frac{-0.4 - 0}{4 - 0} = 0.1$$

luego  $T = 1/k = 10$  y  $VM \cong 0.7 T = 7$ .

En la siguiente figura se muestra como se podían haber determinado  $T$  y  $VM$  a partir de la evolución del estado (figura 7 en este caso).



El sistema tiene la misma estructura que la del ejercicio anterior, se trata de un sistema autorregulado de primer orden. Además la constante de tiempo que se ha determinado en las gráficas es la misma en ambos sistemas. La única diferencia entre ellos, que no es una diferencia estructural sino momentánea, es la causante de las evoluciones temporales del estado. En el ejercicio anterior se parte de un estado inicial nulo y se alcanza un objetivo igual a 2. En este ejercicio se parte de un estado inicial igual a 4 y se alcanza un objetivo igual a 0.

9.- Por el tipo de evolución de la variable de estado, la misma que la figura 5, se deduce que todos los bucles deben ser reguladores de primer orden. Y el único parámetro que puede ser responsable de ese cambio de comportamiento es la constante de tiempo, o lo que es lo mismo, la fracción de tiempo  $k$ . El estado que evoluciona más rápidamente corresponde al sistema de menor constante de tiempo (mayor fracción de tiempo) y viceversa.

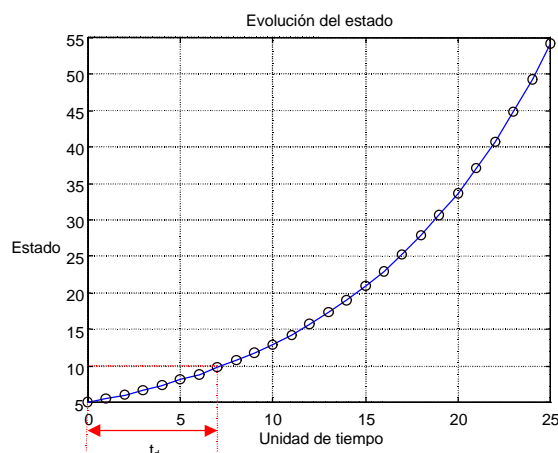


10.- a) La gráfica de la izquierda de la figura 10 es un caso particular de la figura 2.12 del libro de J. Aracil y F. Gordillo. En este caso concreto se observa que el estado parte del valor  $x(0)=5$  y crece de forma exponencial. La gráfica de la derecha de la figura 10 es un caso particular de la figura 2.11, confirmando que el flujo  $F$  en un bucle elemental de realimentación positiva es una función lineal creciente del estado  $x$ , por tanto se puede utilizar para determinar el valor de la fracción por unidad de tiempo  $k$ , como la pendiente de dicha recta. Así pues, considerando la trayectoria completa, se tiene que

$$k = \frac{5.5 - 0.5}{55 - 5} = 0.1$$

El tiempo de duplicación coincide según el enunciado con  $0.7/k$ , luego una vez determinado el valor de  $k$  se tiene que  $t_d = 0.7/k = 7$  unidades de tiempo.

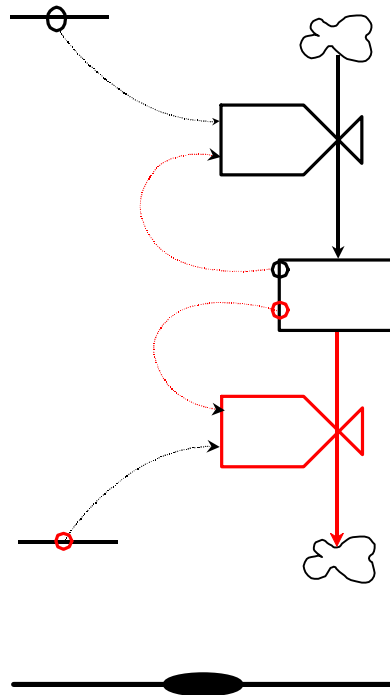
El significado del tiempo de duplicación está demostrado en el libro de J. Aracil y F. Gordillo (pág 37 y 38), luego también se puede determinar de forma gráfica como se muestra en la siguiente figura, buscando el instante en el que el estado alcanza el valor 10, es decir, duplica su valor respecto al valor inicial.



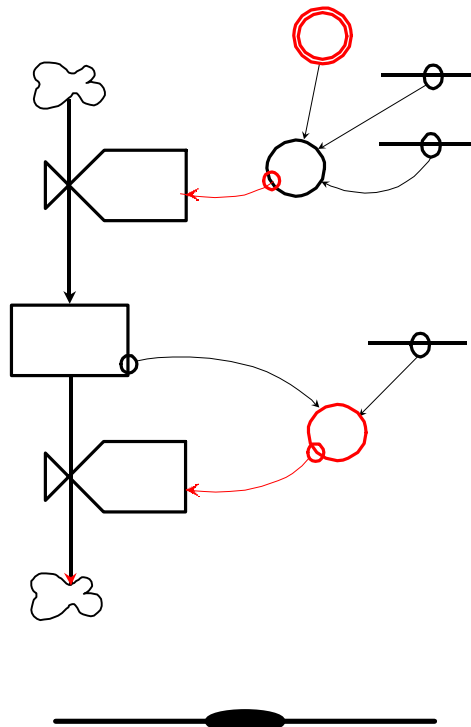
b) Si lo que se quiere representar es el crecimiento que experimenta una bola de nieve al rodar sobre una superficie nevada, la variable de estado del bucle elemental puede ser el diámetro de la bola, y la tasa de crecimiento dependería de la velocidad con que esté rodando la bola. **Justificación:** El diámetro de la bola aumenta porque la nieve del suelo se adhiere a ella, y conforme el diámetro de la bola aumenta mayor es la superficie de contacto de ésta con la nieve del suelo y por tanto mayor es la cantidad de nieve que se adhiere. Si la velocidad con que rueda la bola aumenta mayor la superficie de ésta que ha estado en contacto con la nieve del suelo en la unidad de tiempo y por tanto mayor el crecimiento que experimenta el diámetro de la bola, sería preciso mantener una velocidad constante para que el crecimiento de la bola dependiera únicamente del tamaño de ésta y tuviera un evolución similar al de la figura 10.



11.- Los errores cometidos fueron los siguientes: 1) la utilización de trazo continuo en lugar de discontinuo para algunos canales de información, 2) la utilización de trazo discontinuo en lugar de continuo en un bloque de flujo y en un canal de material, 3) la falta de punta de flecha en un canal de material, 4) la falta de círculo pequeño en varios canales de información. El diagrama de Forrester correcto es el siguiente.



12.- Los errores cometidos fueron los siguientes: 1) la falta de punta de flecha en un canal de material, 2) la ausencia de un canal de información, 3) sentido contrario en un canal de información, 4) la utilización del símbolo de variable auxiliar (círculo grande) en lugar del símbolo de variable exógena (dos círculos concéntricos), 5) la utilización del símbolo de variable exógena (dos círculos concéntricos) en lugar del símbolo de variable auxiliar (círculo grande), 6) la falta de círculos pequeños en algunos canales de información. El diagrama de Forrester correcto es el siguiente.

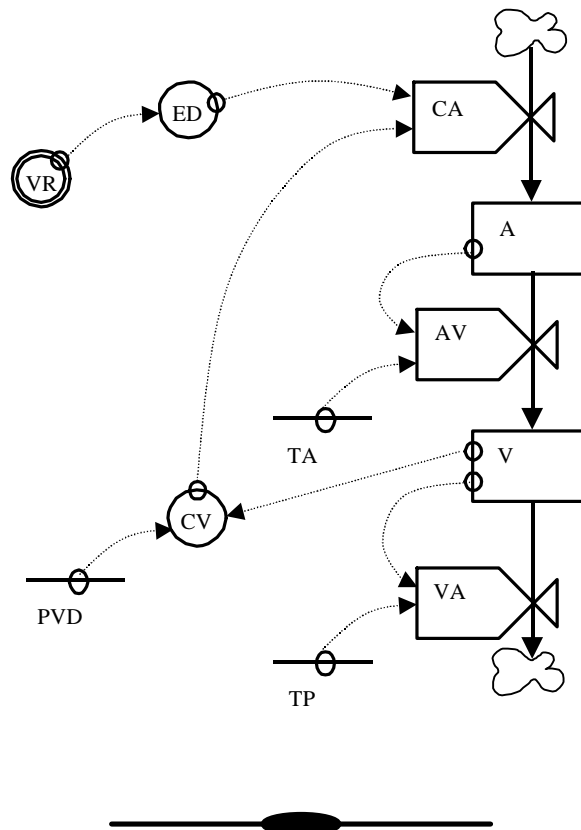


13.- Antes de dibujar el diagrama de Forrester se incluye el diccionario con el nombre y las unidades de cada una de las variables:

- VR: ventas reales de los últimos días (periódicos/día)
- ED: estimación de la demanda (periódicos/día)
- CA : contratación de aprendices (personas/día)
- A: aprendices (personas)
- TA: tiempo de aprendizaje (días)
- AV: aprendices que pasan a ser vendedores (personas/día)
- V: vendedores (personas)
- VA: vendedores que abandonan (personas/días)
- TP: tiempo de permanencia (días)
- PVD: n° de periódicos por vendedor y día (periódicos/personas día)
- CV: capacidad de ventas (periódicos/días)

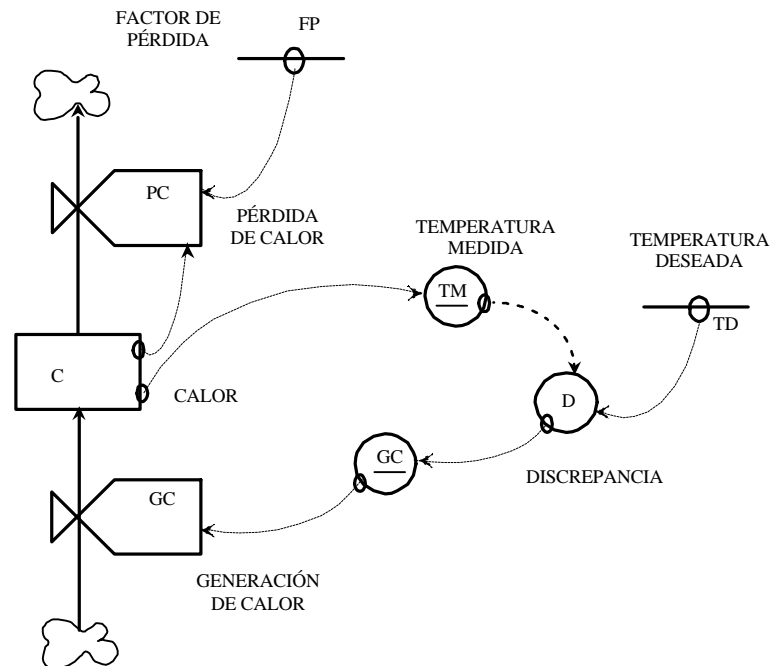
Así como la clasificación por tipos:

- Variables de estado: A y V
- Variables de flujo: CA, AV y VA
- Variables auxiliares: ED y CV
- Parámetros o constantes: TA, TP y PVD
- Variables exógenas: VR



14.- El diagrama de Forrester que se propone incluye de forma explícita dos funciones no lineales, una que relaciona a la temperatura medida con el calor acumulado y otra que relaciona el calor generado con la discrepancia entre temperaturas. Esta explicitación, que no es obligada, se

ha hecho utilizando la nomenclatura propuesta por J. Aracil y F. Gordillo en la figura 3.8 pero prescindiendo de la línea superior sobre la variable, es decir, escribiendo TM y GC para indicar que la temperatura medida y el calor generado son funciones no lineales.



En el diagrama de Forrester propuesto se incluye el nombre completo y el abreviado de cada una de las variables, y están implícitos los tipos de variables que se han considerado: 1 variable de estado (C), dos variables de flujo (PC y GC), 2 variables auxiliares (TM y D), 2 parámetros (FP y TD). Lo que falta por indicar son sus unidades:

C en calorías  
 PC y GC en calorías/unidad de tiempo  
 TM, TD y D en °C  
 FP es adimensional



15.- a) Si el diagrama de Forrester de la figura 15a no incluyera la función no lineal en la realimentación podríamos afirmar que se trata del diagrama de Forrester asociado a un bucle elemental de realimentación positiva. Pero realmente no es así, nos encontramos con un estado  $x$ , que varía en función de una acción (o flujo)  $F$ , que a su vez es función no lineal del estado, es decir:

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t) \quad ; \quad F(t) = k R(x(t))$$

En la figura 15b se puede observar la forma de la función no lineal, que admite la siguiente representación matemática:

$$R(t) = x(t) \quad \text{si } x(t) \leq \frac{x_d}{2}$$

$$R(t) = x_d - x(t) \quad \text{si } x(t) > \frac{x_d}{2}$$

luego la ecuación de realimentación, que relaciona a la acción con el estado, se puede expresar matemáticamente de la forma siguiente

$$F(t) = k x(t) \quad \text{si } x(t) \leq \frac{x_d}{2}$$

$$F(t) = k \left( x_d - x(t) \right) \quad \text{si } x(t) > \frac{x_d}{2}$$

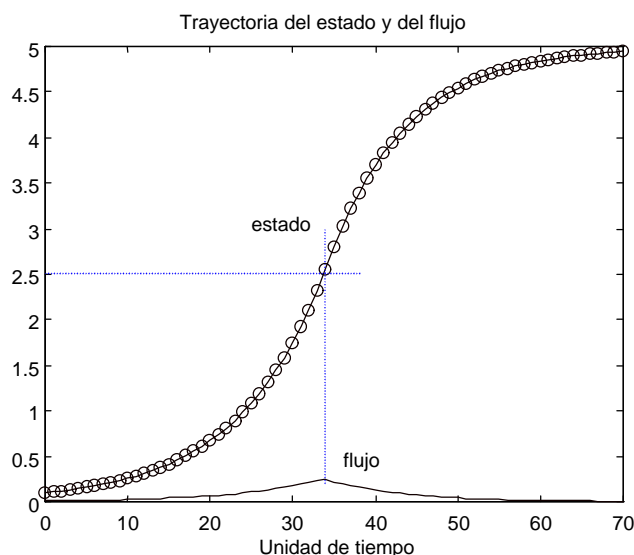
Basta comparar estas expresiones con las ecuaciones (2.9) y (2.6) del libro de J. Aracil y F. Gordillo para observar que: la relación entre el flujo y el estado es la misma que la del bucle elemental de realimentación positiva, de la figura 2.10, cuando el estado está por debajo de la mitad del estado deseado (objetivo) y es la misma que la del bucle elemental de realimentación negativa, de la figura 2.4, cuando el estado está por encima de la mitad del estado deseado. Por tanto, el sistema presentará un crecimiento exponencial hasta el estado medio y flujo máximo. A partir de ese instante el sistema evolucionará al estado deseado de forma asintótica. El comportamiento del sistema será similar al crecimiento sigmoideal que se describe en el apartado 2.3.2 del libro.

**En resumen:** para que un sistema de primer orden presente un crecimiento en S es necesario que exista una función no lineal en la realimentación de nivel de características similares a la de la figura 2.24 del libro. La no linealidad hace que la realimentación sea positiva o negativa en función de que el nivel esté por debajo o por encima del valor al que corresponde un flujo máximo.

b) Los resultados de la simulación están recogidos en la siguiente figura. Donde aparecen tanto la trayectoria del estado como la del flujo; el estado tiene un crecimiento sigmoideal mientras que el flujo que partió de un valor pequeño (0.01) debido al estado inicial (0.1), alcanza su valor máximo después de transcurridas 34 unidades de tiempo, cuando el estado pasa por la mitad del objetivo (2.5), y acaba en un valor nulo cuando el estado alcanza el valor deseado.

**Observación:** En la simulación se ha utilizado la aproximación de Euler para la integración, es decir que

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta t F(t)$$



16.- a) Para reproducir estas gráficas mediante un programa en computador o para comprobar los diez primeros valores de las variables PE y FC lo importante es seguir la secuencia correcta en el cálculo de variables.

1º) Con el valor constante de P y el valor instantáneo de PE se calcula el valor instantáneo de PS. Mediante la expresión

$$PS(t) = P - PE(t)$$

**Observación:** En la primera iteración ( $t=0$ ), se utiliza el dato del enunciado  $PE(0)$ .

2º) Con los valores constantes (PCD y CPI) y los valores instantáneos de PE y PS se calcula el valor instantáneo de FC. Mediante la expresión

$$FC(t) = PCD \cdot CPI \cdot PE(t) \cdot PS(t)$$

3º) Con el intervalo de integración  $\Delta t$  igual a la unidad de tiempo y a partir de los valores instantáneos de PE y FC se calcula el próximo valor de PE. Mediante la expresión

$$PE(t+\Delta t) = PE(t) + \Delta t \cdot FC(t)$$

4º) Se repiten los pasos anteriores tantas veces como sea necesario.

Con esta secuencia, para  $t = 0$ :

$$PE(0) = 1$$

$$PS(0) = P - PE(0) = 500 - 1 = 499$$

$$FC(0) = PCD \cdot CPI \cdot PS(0) \cdot PE(0) = 0.02 \cdot 0.05 \cdot 499 \cdot 1 = 0.4990$$

Para  $t = \Delta t = 1$ :

$$\begin{aligned} PE(1) &= PE(0) + \Delta t FC(0) = 1 + 1 \cdot 0.4990 = 1.4990 \\ PS(1) &= P - PE(1) = 500 - 1.4990 = 498.5010 \\ FC(1) &= PCD \cdot CPI \cdot PS(1) \cdot PE(1) = 0.02 \cdot 0.05 \cdot 498.5010 \cdot 1.4990 = 0.7473. \end{aligned}$$

Para  $t = 2$   $\Delta t = 2$ :

$$\begin{aligned} PE(2) &= PE(1) + \Delta t FC(1) = 1.4990 + 1 \cdot 0.7473 = 2.2463 \\ PS(2) &= P - PE(2) = 500 - 2.2463 = 497.7537 \\ FC(2) &= PCD \cdot CPI \cdot PS(2) \cdot PE(2) = 0.02 \cdot 0.05 \cdot 497.7537 \cdot 2.2463 = 1.1181 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente ...

b) El número de personas que dejan de estar sanas y pasan a estar enfermas viene representado en este modelo por el flujo de contagios diarios. Si se añade la hipótesis de que este número tiene que ser entero resulta que: en  $t=0$ , el valor de  $FC(0) = 0.4990$  determinado en el apartado (a) no llega a la unidad y por tanto ninguna persona pasaría a estar enferma, la población enferma no aumentaría respecto a su valor inicial  $PE(0)=1$ , y la epidemia no se propagaría. Este resultado parece poco realista.

Se nos pregunta ¿si la hipótesis anterior serviría en otras condiciones iniciales? Para contestarla podemos plantearnos una pregunta alternativa: ¿cuál es el número mínimo de personas enfermas de la población total para que se provoque al menos un flujo de contagio igual a la unidad y por tanto que la epidemia se propague entre la población sana? Esta segunda pregunta se contesta resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} FC(0) &= PCD \cdot CPI \cdot PS(0) \cdot PE(0) = 0.02 \cdot 0.05 \cdot PS(0) \cdot PE(0) \geq 1 \\ PS(0) + PE(0) &= 500 \end{aligned}$$

Utilizando la condición de igualdad, este sistema nos lleva a una ecuación de segundo grado en  $PE(0)$ . Concretamente:

$$PE^2(0) - 500 PE(0) + 1000 = 0 \quad \text{con dos posibles soluciones } PE(0) = 2.0081 \text{ y } 497.9919$$

**Interpretación de la solución  $PE(0) = 2.0081$ .** Esta solución indica que se necesitan al menos tres personas enfermas en la población de 500 personas para que la epidemia comience a propagarse entre la población sana. La continuidad de la propagación ya estaría garantizada porque la población enferma tendría un crecimiento sigmoïdal según la naturaleza de este modelo.

**Interpretación de la solución  $PE(0) = 497.9919$ .** Esta solución es la complementaria a la anterior, puesto que el flujo de contagio puede ser pequeño por dos motivos; porque la población enferma es muy pequeña o porque la población sana es muy pequeña. Esta solución no sirve para contestar a la pregunta anterior, pero sí para pronosticar que bajo la hipótesis de que el flujo de contagio tiene que ser un valor entero también puede ocurrir que la epidemia no llegue al total de la población, es decir, que algún miembro de la población se libre de ella.

Se puede comprobar que si  $PE(0)=5$ , la epidemia se propaga hasta alcanzar a 498 personas, mientras que el resto (2 personas) se libran de ella. La siguiente tabla muestra los resultados.

Día	Población enferma	Flujo de contagio
0	5	2
1	7	3
2	10	4
3	14	6
4	20	9
5	29	13
6	42	19
7	61	26
8	87	35
9	122	46
10	168	55
11	223	61
12	284	61
13	345	53
14	398	40
15	438	27
16	465	16
17	481	9
18	490	4
19	494	2
20	496	1
21	497	1
22	498	0
23	498	0
24	498	0
25	498	0

17.- a) El modelo tiene cuatro parámetros cuyos valores y unidades se determinan con los datos del enunciado:

$$\text{CHA} = 2 \text{ camadas/hembra año}$$

$$\text{SC} = 4 \text{ conejos/camada}$$

$$\text{HPP} = 0.1 \text{ hembras/conejos}$$

$$\text{TM} = 0.5 \text{ año}^{-1}$$

Del diagrama de Forrester se deducen las unidades del resto de las variables

C en conejos

NA y MA en conejos/año

y el siguiente conjunto de ecuaciones que pueden describirlo

$$\text{TN} = \text{CHA CS HPP}$$

$$\text{NA}(t) = \text{TN C}(t)$$

$$\text{MA}(t) = \text{TM C}(t)$$



$$\frac{dC(t)}{dt} = NA(t) - MA(t)$$

b) Con los datos del enunciado resulta que la tasa de natalidad vale

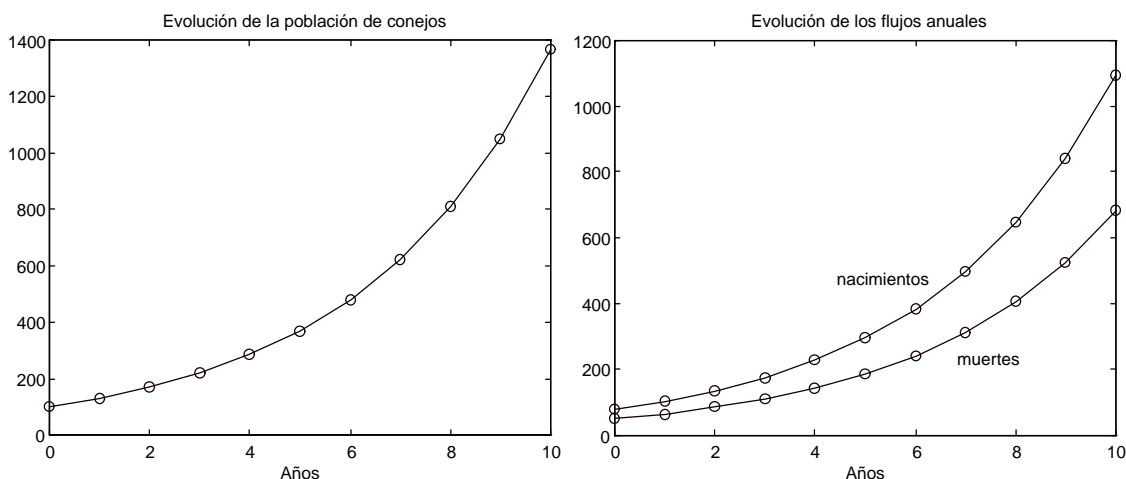
$$TN = \text{CHA CS HPP} = 2 \cdot 4 \cdot 0.1 = 0.8$$

mientras que la tasa de mortalidad vale  $TM = 0.5$ , es decir  $TN > TM$ . Por tanto el flujo de nacimientos anuales será siempre mayor que el flujo de muertes y la población de conejos crecerá indefinidamente, además todo ello es independiente de la población inicial.

La gráficas siguientes que muestran los resultados, evolución de la población y evolución de los flujos, con una población inicial de 100 conejos sirven para comprobar lo comentado anteriormente. **Observación:** estos resultados se han obtenido mediante la integración de Euler:

$$C(t+\Delta t) = C(t) + \Delta t ( NA(t) - MA(t) )$$

y como paso de integración  $\Delta t=1$  año, es decir la unidad de tiempo.



c) En el modelo mejorado, la tasa de mortalidad es una función no lineal creciente con la población hasta un máximo de la unidad. En el tramo lineal la relación entre la tasa de mortalidad y la población de conejos es la siguiente

$$TM(t) = 0.001 C(t)$$

Por tanto, dependiendo del valor instantáneo de la población, la tasa de mortalidad puede ser menor o mayor que la tasa de natalidad. El equilibrio en el sistema y por tanto en la población de conejos se alcanzará cuando  $TM(t)$  iguale al valor constante de  $TN$ , ya que entonces los flujos de nacimientos y de muertes serán iguales y la población, dada por la ecuación

$$C(t+\Delta t) = C(t) + \Delta t ( NA(t) - MA(t) )$$

mantendrá su valor para el año siguiente y todos los sucesivos.

La situación de equilibrio se alcanzará en el instante  $t_e$ , tal que

$$TM(t_e) = 0.001 C(t_e) = TN = 0.8 \Rightarrow C(t_e) = 800$$

**Por tanto el número 800 es el valor de la población para la que se alcanza el equilibrio. Este valor es independiente del valor inicial de la población. Si la población inicial es inferior a 800, la población crecerá hasta ese valor porque el número de nacimientos es mayor al número de muertes, mientras que si la población inicial es superior a 800, la población decrecerá hasta ese valor porque el número de nacimientos es menor al número de muertes. En ninguno de los casos se producirán oscilaciones en torno al valor de equilibrio.**

d) Para reproducir los valores de la tabla mediante un programa en computador lo importante es seguir la secuencia correcta en el cálculo de variables.

1º) Con los valores constantes de CHA (el número de camadas por hembra y año), SC (el número de supervivientes por camada) y HPP (el porcentaje de hembras productivas en la población) se calcula el valor constante de TN (la tasa de natalidad). Mediante la expresión

$$TN = CHA SC HPP$$

2º) Con el valor constante de TN y el valor instantáneo de C (la población de conejos) se calcula el valor instantáneo de NA (el flujo de nacimientos anuales). Mediante la expresión

$$NA(t) = TN C(t)$$

**Observación:** En la primera iteración ( $t=0$ ), se utiliza el dato del enunciado  $C(0) = 100$ .

3º) Con el valor instantáneo de C se calcula el valor instantáneo de TM (la tasa de mortalidad). Mediante la expresión

$$TM(t) = 0.001 C(t)$$

Pero si el valor de  $TM(t)$  calculado es superior a la unidad se satura a ese valor. O lo que es igual si la población es mayor que 1000 se hace  $TM(t) = 1$ .

4º) Con los valores instantáneos de C y TM se calcula el valor instantáneo de MA (el flujo de muertes anuales). Mediante la expresión

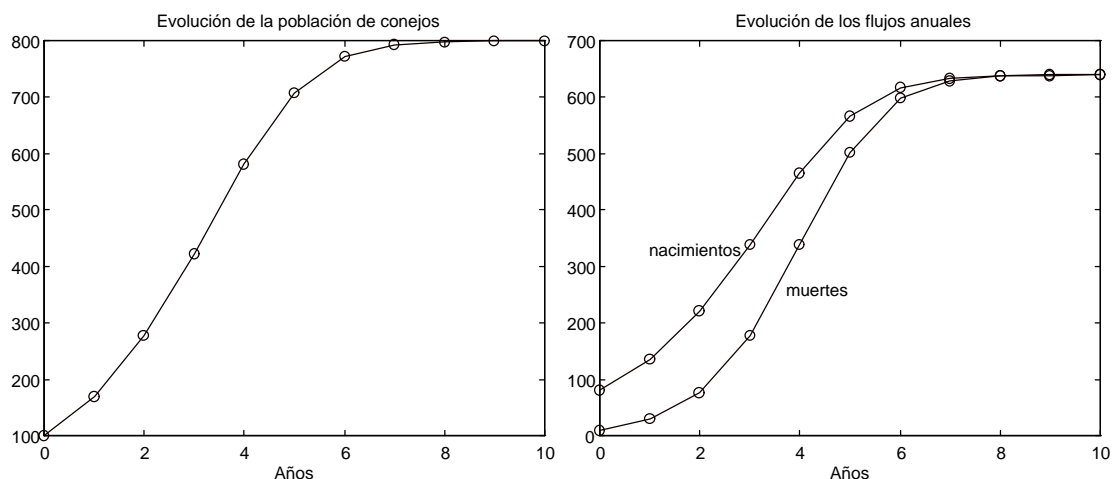
$$MA(t) = C(t) TM(t)$$

5º) Con el intervalo de integración  $\Delta t$  igual a la unidad de tiempo y a partir de los valores instantáneos de C, NA y MA se calcula el próximo valor de C. Mediante la expresión

$$C(t+\Delta t) = C(t) + \Delta t ( NA(t) - MA(t) )$$

6º) Se repiten diez veces los pasos 2,3 4 y 5.

Con esta secuencia,  $TN = 2 \cdot 4 \cdot 0.1 = 0.8$ . Para  $t = 0$  ;  $C(0) = 100$ ,  $NA(0) = 0.8 \cdot 100 = 80$ ,  $TM(0) = 0.001 \cdot 100 = 0.1$ ,  $MA(0) = 0.1 \cdot 100 = 10$ . Para  $t=1$  ;  $C(1) = 100 + (80-10) = 170$ ,  $NA(1) = 0.8 \cdot 170 = 136$ ,  $TM(1) = 0.001 \cdot 170 = 0.17$ ,  $MA(1) = 0.17 \cdot 170 \cong 29$ . Y así sucesivamente, ....., como queda recogido en las gráficas siguientes.



Hasta el noveno año se observa que el flujo de nacimientos es superior al flujo de muertes, de ahí que la población de conejos crezca. Por este mismo motivo el flujo de muertes crece y tiende a igualar al número de nacimientos. En el momento que esto ocurre (noveno año), la población deja de crecer y se mantiene al valor constante de 800 conejos. De esta situación de equilibrio ya es imposible salir a menos que exista alguna perturbación. Pero aunque esto último ocurriera se volvería, después de un cierto transitorio, a una nueva situación de equilibrio. Por tanto en este sistema nunca se presentaría una situación oscilatoria o inestable.



18.- a) Hay que comprobar que los valores  $P(0)=50$  y  $V(0)=50$  son compatibles con el valor  $AD=100$ . Efectivamente, por las ecuaciones del modelo, por los datos del enunciado  $PD=10$ ,  $TAA=1$  y  $TAE=5$ , y por las condiciones de simulación se tiene que:

$$P(0) = E(0) PD \Rightarrow E(0) = P(0) / PD = 50 / 10 = 5$$

$$C(0) = (AD - A(0)) / (TAE TAA PD) = (100 - A(0)) / (1 \cdot 5 \cdot 10) = (100 - A(0)) / 50$$

$$E(1) = E(0) + \Delta t C(0) = 5 + 1 (100 - A(0)) / 50$$

$$P(1) = E(1) PD = (5 + (100 - A(0)) / 50) \cdot 10 = 70 - A(0)/5 = P(0) = 50 \Rightarrow A(0) = 100$$

Al coincidir el valor inicial del almacén con el valor deseado, no habrá contratación, el empleo se mantendrá y por tanto también la producción, que seguirá siendo igual a las ventas salvo que ésta última cambie y modifique el almacén.

b) En  $t=10$ , con la siguiente situación de variables  $A(10)=100$ ,  $P(10)=50$ ,  $E(10)=5$  y  $C(10)=0$ , se produce el cambio en las ventas  $V(10)=75$ , que tiene las siguientes consecuencias

$$E(11) = E(10) + \Delta t C(10) = 5 + 1 \cdot 0 = 5$$

$$A(11) = A(10) + \Delta t (P(10) - V(10)) = 100 + 1 (50 - 75) = 75$$

$$C(11) = (AD - A(11)) / (TAE TAA PD) = (100 - 75) / (1 \cdot 5 \cdot 10) = 0.5$$

$$P(11) = E(11) PD = 5 \cdot 10 = 50$$

$$E(12) = E(11) + \Delta t C(11) = 5 + 1 \cdot 0.5 = 5.5$$

$$A(12) = A(11) + \Delta t (P(11) - V(11)) = 75 + 1 (50 - 75) = 50$$

$$C(12) = (AD - A(12)) / (TAE TAA PD) = (100 - 50) / (1 \cdot 5 \cdot 10) = 1$$

$$P(12) = E(12) PD = 5.5 \cdot 10 = 55$$

$$E(13) = E(12) + \Delta t C(12) = 5.5 + 1 \cdot 1 = 6.5$$

$$A(13) = A(12) + \Delta t (P(12) - V(12)) = 50 + 1 (55 - 75) = 30$$

$$C(13) = (AD - A(13)) / (TAE TAA PD) = (100 - 30) / (1 \cdot 5 \cdot 10) = 1.4$$

$$P(13) = E(13) PD = 6.5 \cdot 10 = 65$$

$$E(14) = E(13) + \Delta t C(13) = 6.5 + 1 \cdot 1.4 = 7.9$$

$$A(14) = A(13) + \Delta t (P(13) - V(13)) = 30 + 1 (65 - 75) = 20$$

$$C(14) = (AD - A(14)) / (TAE TAA PD) = (100 - 20) / (1 \cdot 5 \cdot 10) = 1.6$$

$$P(14) = E(14) PD = 7.9 \cdot 10 = 79$$

en esta semana la producción supera a las ventas, luego el almacén que está muy por debajo del valor deseado empezará a subir y sin embargo no se alcanzará la situación de equilibrio entre ventas y producción. La evolución de las variables será la indicada en la figura 18.

Si bien el modelo de la figura 4.15 corresponde a un sistema de segundo orden, con un comportamiento oscilatorio mantenido (según explican J. Aracil y F. Gordillo en su libro). La simulación realizada ha producido un comportamiento oscilatorio inestable (véase figura 18) debido al método de integración y al retraso adicional, de valor  $\Delta t$ , que se introduce al evaluar la ecuación

$$E(t + \Delta t) = E(t) + \Delta t C(t)$$

antes de la ecuación

$$C(t) = (AD - A(t)) / (TAE TAA PD)$$

Basta elegir un  $\Delta t$  mucho menor, por ejemplo  $\Delta t = 0.1$  semana, para reproducir el comportamiento oscilatorio mantenido que pronostican J. Aracil y F. Gordillo.

c) La modificación de cualquiera de los parámetros (PD, TAA y TAE) del modelo sólo altera la frecuencia de la oscilación pero no el comportamiento cualitativo del sistema, que sigue siendo el mismo. Por tanto, si se quiere hacer estable es necesario modificar su estructura.

Antes de sugerir alguna modificación es necesario precisar que las oscilaciones están provocadas porque la toma de decisiones respecto al empleo no se toman en el instante que se produce el cambio brusco en las ventas sino en función del efecto que este cambio tiene en el almacén, y por tanto se toman si no equivocadamente sí al menos un poco tarde. Por otra parte, partiendo de una situación de equilibrio en el almacén, sólo se alcanzará otra situación de equilibrio, que no tiene por qué coincidir con el valor deseado, si la producción iguala a las ventas, es decir, si el empleo se estabiliza en el valor  $V(\infty)/PD$  (ventas divididas por la productividad de los empleados).

Si la variable  $V$  (ventas) fuera conocida, todo estaría resuelto, se podría establecer una planificación perfecta “producir sólo lo que se vende” y por tanto emplear sólo al personal necesario en ese momento, tomando como objetivo para el empleo el valor  $V(t)/PD$ . Pero como

no es así, lo único que se puede hacer es tratar de estimar (predecir) su valor. Si de la ecuación (4.2) del libro, que describe el cambio experimentado en el almacén, despejamos  $V(t)$  se tiene que

$$V(t) = P(t) - \frac{dA(t)}{dt}$$

es decir que las ventas se pueden evaluar en función de lo que se ha producido y el cambio que ha sufrido el almacén.

Si en lugar de evaluar las ventas lo que pretendemos es estimarlas, la ecuación anterior se puede sustituir por esta otra:

$$V^*(t) \cong V(t - \Delta t) = PD E(t - \Delta t) - \frac{A(t) - A(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

es decir, hemos considerado que las ventas en el instante  $t$  van a ser las mismas que un instante anterior, hemos sustituido la producción por la ecuación que la relaciona con el número de empleados, y hemos considerado la aproximación de Euler para la derivada. El empleo óptimo en ese momento sería

$$EO(t) = \frac{V^*(t)}{PD} \cong E(t - \Delta t) - \frac{A(t) - A(t - \Delta t)}{\Delta t PD}$$

Una parte de la política de contratación (o descontratación) se debería hacer en función de la diferencia que exista entre el empleo actual y el óptimo, por tanto

$$C_1(t) = \frac{EO(t) - E(t)}{TAE}$$

Pero en la ecuación de la estimación de las ventas se ha supuesto que todos los cambios que se producen en el almacén se deben a la diferencia entre producción y ventas, sin embargo si al modelo se le incorpora la política de ajuste del almacén a un valor deseado, independientemente de las ventas en ese momento, está claro que si se quiere aumentar el almacenamiento aunque las ventas no hayan cambiado, es necesario emplear a más personal, por tanto debemos considerar otra política de contratación (o descontratación) con el fin de mantener el almacén en un valor deseado

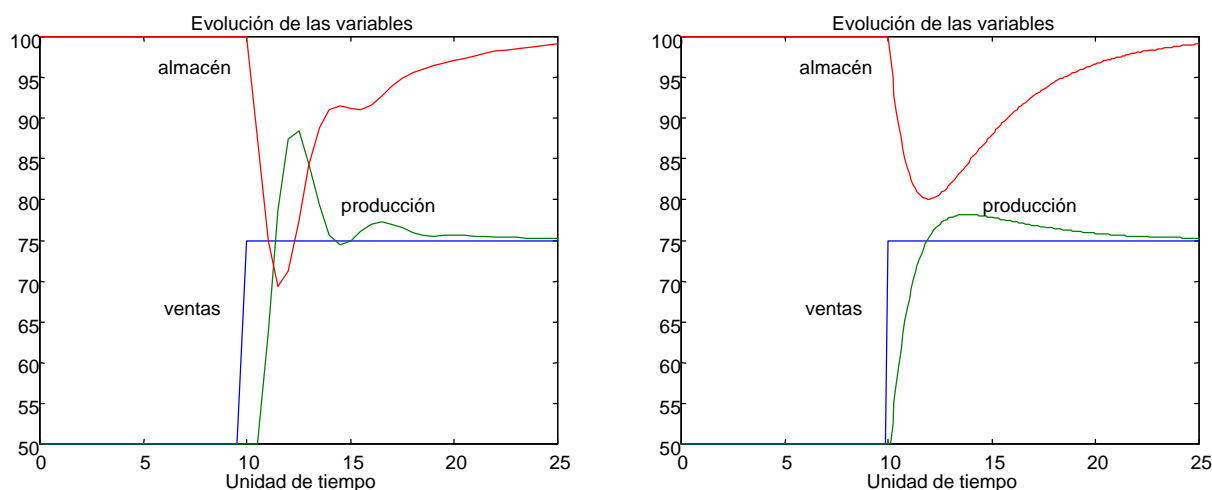
$$C_2(t) = \frac{AD - A(t)}{TAA PD}$$

Combinando ambas políticas de contratación en una sola variable se llega a la siguiente expresión

$$C(t) = C_1(t) + C_2(t) = \frac{E(t - \Delta t) - E(t)}{TAE} - \frac{A(t) - A(t - \Delta t)}{\Delta t TAE PD} + \frac{AD - A(t)}{TAA PD}$$

que debe sustituir a la ecuación (4.5) del modelo original.

Las gráficas que se incluyen a continuación muestran que el modelo modificado tiene un comportamiento estable. En ellas se observa que como  $TAE = 1$  y  $TAA = 5$ , se está dando más prioridad al equilibrio producción-ventas que al equilibrio del almacén. También se ha podido comprobar que el modelo sigue siendo bastante sensible al paso de integración  $\Delta t$ , ya que la simulación realizada con  $\Delta t=1$  presentaba un comportamiento inestable (no se muestra), la realizada con  $\Delta t=0.5$  presenta (véase figura de la izquierda) un comportamiento bastante oscilatorio, y la realizada con  $\Delta t=0.1$  es (véase figura de la derecha) menos oscilatoria,



Resultados de simulación con el modelo modificado para dos pasos de integración diferentes;  $\Delta t=0.5$  (gráficas de la izquierda) y  $\Delta t=0.1$  (gráficas de la derecha).

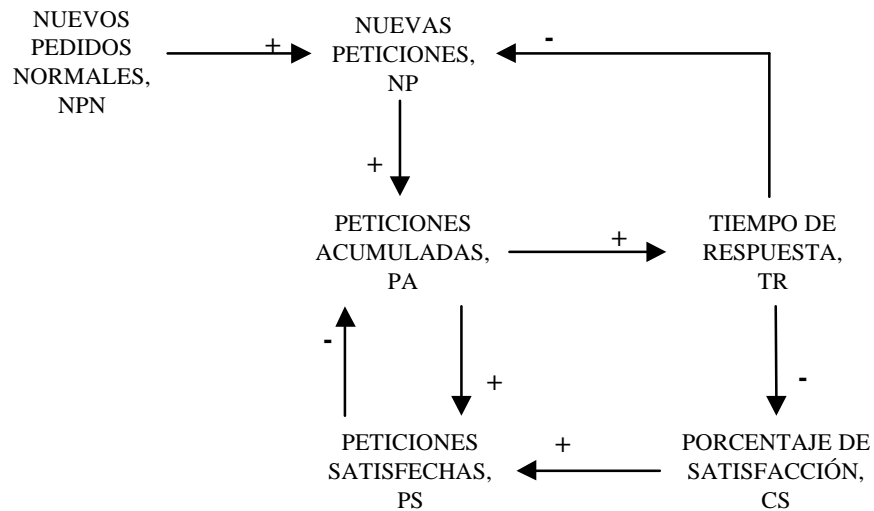
Las modificaciones que se han introducido en el cálculo del flujo de contratación se interpretan en teoría de sistemas de control como la inclusión de unas acciones correctoras en función del cambio en el empleo y de la variación (derivada) del nivel del almacén. De esta forma las decisiones sobre el empleo tienen un carácter predictivo, ya que el modelo es capaz de predecir que como el nivel de empleo ha aumentado (o disminuido) o como el nivel del almacén está subiendo (o bajando) hay que cambiar la política de contratación aunque el empleo o el almacén todavía se encuentren por debajo (o por encima) del valor óptimo y del valor deseado, respectivamente. Mientras que el modelo anterior las decisiones sobre el empleo se tomaban siempre tarde, cuando el almacén estaba por encima (o por debajo) del valor deseado.



19.- a) Como se recomienda en el enunciado, la determinación de los signos de cada una de las relaciones del diagrama de influencias se puede hacer acudiendo a las ecuaciones que describen al modelo y a las gráficas de las funciones no lineales. Concretamente:

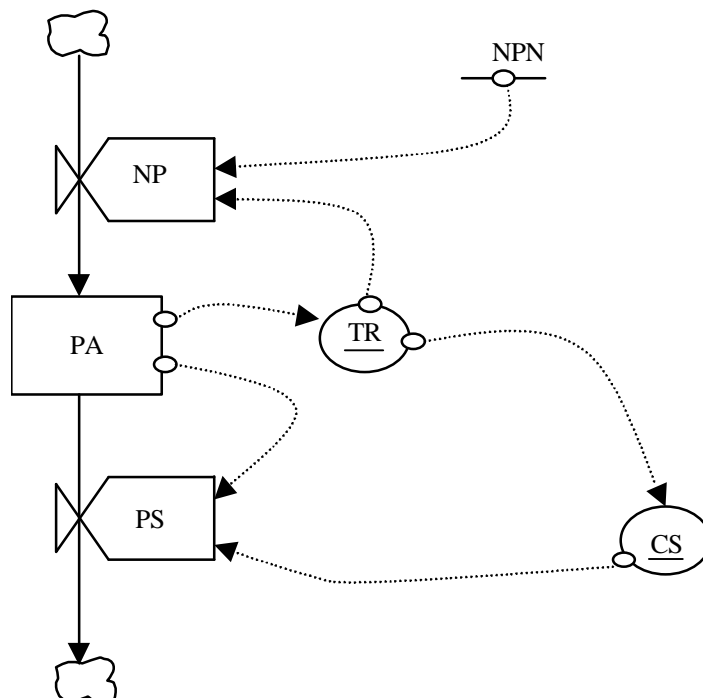
- De la ecuación  $d PA(t)/dt = NP(t) - PS(t)$  se deducen los signos de las relaciones  $NP \rightarrow^+ PA$  y  $PS \rightarrow^- PA$ .
- De la ecuación  $NP(t) = NPN / TR(t)$  se deducen los signos de las relaciones  $NPN \rightarrow^+ NP$  y  $TR \rightarrow^- NP$ .
- De la ecuación  $PS(t) = PA(t) CS(t) / 100$  se deducen los signos de las relaciones  $PA \rightarrow^+ PS$  y  $CS \rightarrow^+ PS$ .

- De la forma de la función  $TR = f(PA)$ , creciente para todo valor de  $PA$ , se deduce el signo de la relación  $PA \rightarrow^+ TR$ .
- Y por último de la forma de la función  $CS = g(TR)$ , decreciente para todo valor de  $TR$ , se deduce el signo de la relación  $TR \rightarrow^- CS$ .



b) Antes de dibujar el diagrama de Forrester se hace una clasificación de las variables:

- Variables de estado:  $PA$
- Variables de flujo:  $NP$  y  $PS$
- Variables auxiliares:  $TR$  y  $CS$
- Parámetros ó constantes:  $NPN$



c) Antes de comenzar la simulación es importante ordenar adecuadamente las ecuaciones del modelo, que este caso puede ser el siguiente

$$\begin{aligned} PA(t+\Delta t) &= PA(t) + \Delta t (NP(t) - PS(t)) \\ TR(t) &= f(PA(t)) \\ CS(t) &= g(TR(t)) \\ NP(t) &= NPN / TR(t) \\ PS(t) &= PA(t) CS(t) / 100 \end{aligned}$$

donde se ha optado por una integración de Euler y donde las condiciones iniciales y los parámetros son:

$$\begin{aligned} PA(0) &= 1000 \\ NPN &= 500 \\ \Delta t &= 1 \end{aligned}$$

También es importante indicar qué tipo de tratamiento van a recibir las variables enteras (si las hay) y las variables reales. Concretamente en este modelo cabe considerar como variables enteras a las dos variables de flujo (NP y PS), de esa manera garantizamos que las peticiones acumuladas (PA) también tomará valores enteros. En estas variables se optará por hacer un redondeo hacia el menor número entero. Y en las variables reales, TR y CS, se optará por arrastrar dos decimales, despreciando el resto. En cambio los cálculos intermedios se harán con cuatro decimales.

En  $t = 0$ :

$$PA(0) = 1000$$

$$TR(0) = f(PA(0)) = f(1000) = 1.50 \text{ (mirando directamente en tabla)}$$

$$CS(0) = g(TR(0)) = g(1.50) = 94.50$$

**Para calcular el valor de  $CS(0)$  ha sido necesario realizar una interpolación lineal. Al ser  $TR(0) = 1.50$ , un valor comprendido entre los valores 1 y 2 de la tabla, es preciso calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos (1,99) y (2,90), donde esos pares de puntos representan pares (TR,CS). Por tanto la ecuación de la recta en ese tramo será:**

$$\frac{TR - TR_0}{TR_1 - TR_0} = \frac{CS - CS_0}{CS_1 - CS_0}$$

**Identificando:**

$$(TR_0, CS_0) \equiv (1, 99)$$

$$(TR_1, CS_1) \equiv (2, 90)$$

**y sustituyendo y despejando CS en la ecuación de la recta, obtenemos:**

$$CS = -9 TR + 108$$



**Particularizamos para  $TR(0) = 1.50$  y calculamos  $CS(0)$ :**

$$CS(0) = -9 \times 1.50 + 108 = 94.50$$

$$NP(0) = NPN / TR(0) = 500 / 1.50 \cong 333$$

$$PS(0) = PA(0) CS(0) / 100 = 1000 \times 94.50 / 100 = 945$$

En  $t = 1$ :

$$PA(1) = PA(0) + \Delta t (NP(0) - PS(0)) = 1000 + 1 (333 - 945) = 388$$

$$TR(1) = f(PA(1)) \cong 0.59$$

**Para calcular el valor de  $TR(1)$  es necesario realizar una interpolación lineal. Al ser  $PA(1) = 388$ , habrá que calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(200,0.5)$  y  $(400,0.6)$ , donde esos pares de puntos representan pares  $(PA,TR)$ . Por tanto la ecuación de la recta en ese tramo será:**

$$\frac{PA - PA_0}{PA_1 - PA_0} = \frac{TR - TR_0}{TR_1 - TR_0}$$

**Identificando:**

$$(PA_0, TR_0) \equiv (200, 0.5)$$

$$(PA_1, TR_1) \equiv (400, 0.6)$$

**y sustituyendo y despejando  $TR$  en la ecuación de la recta, obtenemos:**

$$TR = 0.0005 PA + 0.4$$

**Particularizamos para  $PA(1) = 388$  y calculamos  $TR(1)$ :**

$$TR(1) = 0.0005 \times 388 + 0.4 \cong 0.59$$

$$CS(1) = g(TR(1)) \cong 99.41 \text{ (se calcula mediante interpolación)}$$

$$NP(1) = NPN / TR(1) = 500 / 0.59 \cong 847$$

$$PS(1) = PA(1) CS(1) / 100 = 388 \times 99.41 / 100 \cong 385$$

En  $t = 2$ :

$$PA(2) = PA(1) + \Delta t \cdot (NP(1) - PS(1)) = 388 + 1 (847 - 385) = 850$$

$$TR(2) = f(PA(2)) \cong 1.12 \text{ (se calcula mediante interpolación)}$$

$$CS(2) = g(TR(2)) \cong 97.92 \text{ (se calcula mediante interpolación)}$$

$$NP(2) = NPN / TR(2) = 500 / 1.12 \cong 446$$

$$PS(2) = PA(2) CS(2) / 100 = 850 \times 97.92 / 100 \cong 832$$

En t = 3:

$$PA(3) = PA(2) + \Delta t (NP(2) - PS(2)) = 850 + 1 (446 - 832) = 464$$

$$TR(3) = f(PA(3)) \cong 0.64 \text{ (se calcula mediante interpolación)}$$

$$CS(3) = g(TR(3)) \cong 99.36 \text{ (se calcula mediante interpolación)}$$

$$NP(3) = NPN / TR(3) = 500 / 0.64 \cong 781$$

$$PS(3) = PA(3) CS(3) / 100 = 464 \times 99.36 / 100 \cong 461$$

En t = 4:

$$PA(4) = PA(3) + \Delta t (NP(3) - PS(3)) = 464 + 1 (781 - 461) = 784$$

$$TR(4) = f(PA(4)) \cong 0.98 \text{ (se calcula mediante interpolación)}$$

$$CS(4) = g(TR(4)) \cong 99.02 \text{ (se calcula mediante interpolación)}$$

$$NP(4) = NPN / TR(4) = 500 / 0.98 \cong 510$$

$$PS(4) = PA(4) CS(4) / 100 = 784 \times 99.02 / 100 \cong 776$$

En t = 5:

$$PA(5) = PA(4) + \Delta t (NP(4) - PS(4)) = 784 + 1 (510 - 776) = 518$$

$$TR(5) = f(PA(5)) \cong 0.68 \text{ (se calcula mediante interpolación)}$$

$$CS(5) = g(TR(5)) \cong 99.32 \text{ (se calcula mediante interpolación)}$$

$$NP(5) = NPN / TR(5) = 500 / 0.68 \cong 735$$

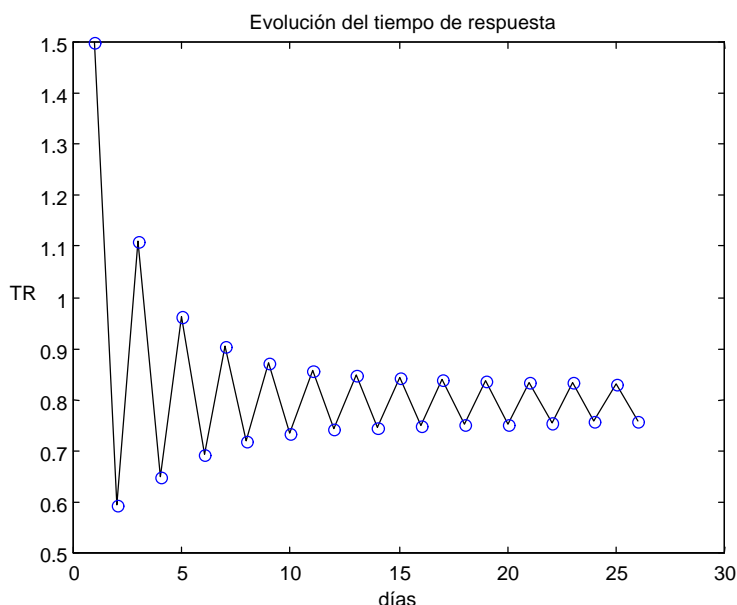
$$PS(5) = PA(5) CS(5) / 100 = 518 \times 99.32 / 100 \cong 514$$

En la siguiente tabla se resumen los valores de interés de los cinco primeros días:

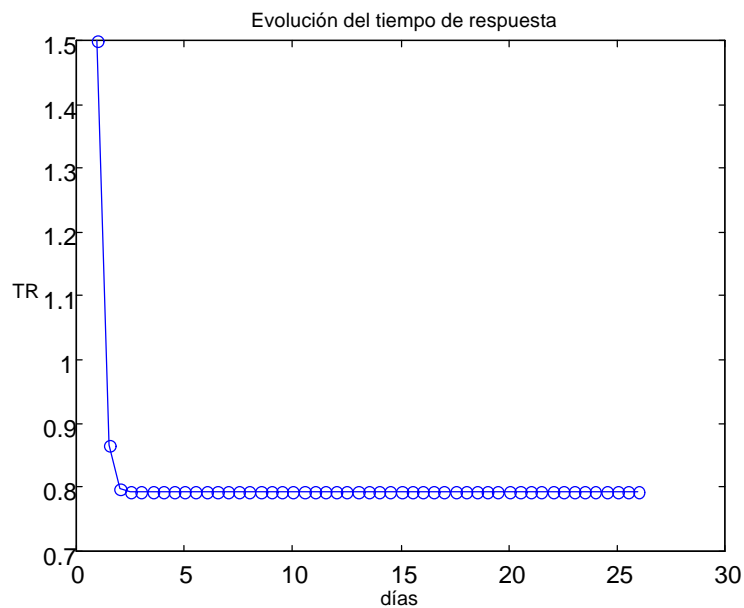
t	PA	TR	CS	NP	PS
0	1000	1.50	94.50	333	945
1	388	0.59	99.41	847	385
2	850	1.12	97.92	446	832
3	464	0.64	99.36	781	461
4	784	0.98	99.02	510	776
5	518	0.68	99.32	735	514

En esta tabla comprobamos que el comportamiento es oscilante porque los valores de PA en los días pares es siempre mayor que en los días impares y es estable porque los valores de PA en los días pares va decreciendo y en los días impares va aumentando. Lo mismo ocurre con las variables TR y PS. Pero lo contrario con las variables CS y NP.

Si programamos el modelo en un computador o continuamos la simulación durante 25 días observaremos la evolución del tiempo de respuesta (TR) representada en la siguiente figura. Es decir que realmente existe una oscilación mantenida de amplitud pequeña entorno al valor 0.8.



d) El modelo analizado es un modelo de primer orden pues sólo tiene una variable de estado, las peticiones acumuladas (PA). En este tipo de estructuras elementales no se puede producir ningún tipo de comportamiento oscilatorio, como afirman J. Aracil y F. Gordillo en las páginas 93 y 94 de su libro. La única explicación al comportamiento oscilatorio es que estemos utilizando un método de integración limitado (como es la aproximación de Euler) y además con un paso de integración demasiado grande. Efectivamente basta repetir la simulación con  $\Delta t=0.5$ , es decir la mitad del anterior para obtener el resultado que se muestra a continuación



20.- a) Las variables se pueden clasificar como sigue:

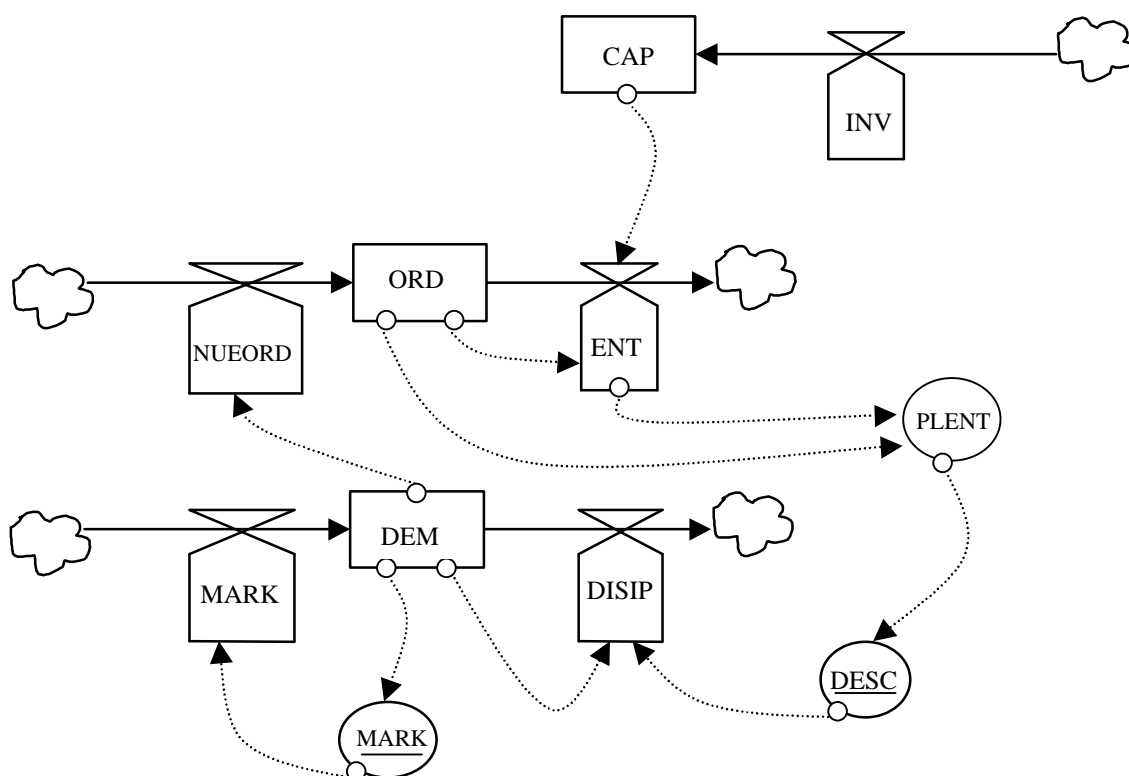
VARIABLES DE ESTADO: ORD, CAP y DEM.

VARIABLES DE FLUJO: NUEORD, ENT, INV, MARK y DISIP.

VARIABLES AUXILIARES: DESC y PLENT.

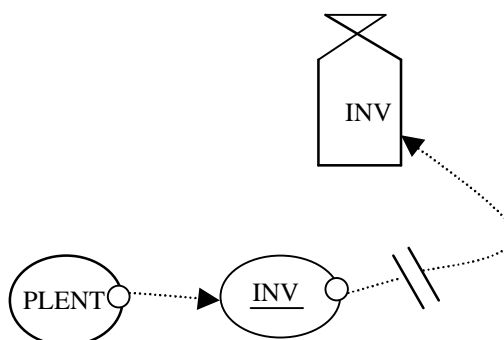
PARÁMETROS Ó CONSTANTES: RETINV.

b) El diagrama de Forrester cuando no hay política de inversión (**hipótesis 1**) es el siguiente:

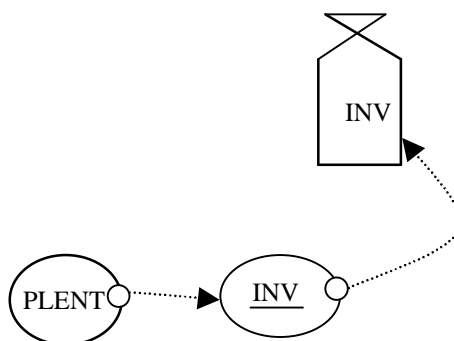


**Observación:** En el diagrama se cumple la condición (recogida por J. Aracil y F. Gordillo en la página 64 de su libro) que las variables de flujo dependen exclusivamente de variables de estado y de variables auxiliares, y por tanto que dos variables de flujo no se pueden conectar entre sí, pero no obstante está claro que existe una dependencia directa entre los flujos ENT y DISIP a través de las variables auxiliares PLENT y DESC, sin pasar por ninguna variable de estado. Esta situación se ha podido presentar porque es la primera vez que se utiliza una variable de flujo para generar información, concretamente la variable auxiliar PLENT depende del flujo ENT. Aunque esta situación no sea habitual consideraremos que no está prohibida en un diagrama de Forrester.

Si la política de inversión se hace según la **hipótesis 2**, habría que añadir en el diagrama de Forrester anterior los siguientes elementos entre la variable PLENT y la variable INV:



Mientras que si la política de inversión se hace según la **hipótesis 3**, basta con añadir un único elemento en el diagrama de Forrester de la hipótesis 1, que represente la dependencia no linealidad que existe de la variable INV respecto a la variable PLENT.



c) La simulación de este modelo no presenta ninguna dificultad adicional respecto a las simulaciones realizadas en otros ejercicios, salvo cuando existe retraso en la política de inversión (hipótesis 2). Una posible secuencia de cálculo, con integración por Euler en las ecuaciones diferenciales, es la siguiente:

1º) Actualización de las órdenes pendientes:

$$\begin{aligned} \text{NUEORD}(t) &= \text{DEM}(t) \\ \text{ENT}(t) &= \min(\text{CAP}(t), \text{ORD}(t)) \\ \text{ORD}(t+\Delta t) &= \text{ORD}(t) + \Delta t (\text{NUEORD}(t) - \text{ENT}(t)) \end{aligned}$$

2º) Actualización de la demanda:

$$\begin{aligned} \text{MARK}(t) &= 0.1 + \max((\text{DEM}(t) - 2) / 20, 0) \\ \text{PLENT}(t) &= \text{ORD}(t) / \text{ENT}(t) \\ \text{DESC}(t) &= f(\text{PLENT}(t)) \\ \text{DISIP}(t) &= (0.01 + \text{DESC}(t)) \text{DEM}(t) \\ \text{DEM}(t+\Delta t) &= \text{DEM}(t) + \Delta t (\text{MARK}(t) - \text{DISIP}(t)) \end{aligned}$$

3º) Actualización de las inversiones:

Sin política de inversión (**hipótesis 1**):

$$\text{INV}(t) = 0$$

Con política de inversión pero con retraso (**hipótesis 2**):

$$\text{INV}(t+\Delta t) = \text{INV}(t) + \Delta t (\max(\text{PLENT}(t) - 5, 0) - \text{INV}(t)) / \text{RETINV}$$

**Justificación:** Esta ecuación es el resultado de aproximar el retraso por una ecuación diferencial de primer orden y a continuación integrar por el método de Euler.

La aproximación del retraso por una ecuación diferencial de primer orden (véase la expresión 3.12 del libro de J. Aracil y F. Gordillo) consiste en sustituir la función

$$\text{salida}(t) = \text{delay}(\text{entrada}(t), \text{retraso})$$

por la ecuación

$$\frac{d \text{ salida}(t)}{dt} = \frac{1}{\text{retraso}} (\text{entrada}(t) - \text{salida}(t))$$

En este caso concreto;

**la entrada(t) es la variable max(PLENT(t)-5,0)**  
**la salida(t) en INV(t)**  
**y el valor del retraso es RETINV**

luego

$$\text{INV}(t) = \text{delay}(\text{max}(\text{PLENT}(t) - 5,0), \text{RETINV})$$

se puede aproximar por

$$\frac{d \text{ INV}(t)}{dt} = \frac{\text{max}(\text{PLENT}(t) - 5,0) - \text{INV}(t)}{\text{RETINV}}$$

Con política de inversión inmediata (**hipótesis 3**):

$$\text{INV}(t) = \text{max}(\text{PLENT}(t) - 5,0)$$

4º Actualización de la capacidad de producción:

$$\text{CAP}(t+\Delta t) = \text{CAP}(t) + \Delta t \text{ INV}(t)$$

d) Si ha seguido la secuencia de cálculo descrita en el apartado anterior no habrá tenido dificultad en reproducir los resultados, salvo el gran número de iteraciones (concretamente 1001 iteraciones) en cada una de las tres situaciones.

Bajo la hipótesis 1 (ausencia de inversión), el modelo presenta un comportamiento cíclico en las dos variables representadas en la figura. En cualquiera de estos ciclos; la demanda primero crece y luego disminuye bruscamente, mientras que el plazo de entrega primero disminuye, luego se estabiliza y por último crece. Lo realmente importante en estos ciclos son los cambios de tendencia, el cambio en la demanda se produce cuando el plazo de entrega supera los 7 días, ya que según la función  $\text{DESC} = f(\text{PLENT})$ , este aumento del plazo provoca un descontento que se transmite a través de la variable DISIP y produce la consecuente disminución de la demanda.

El plazo de entrega disminuye cuando el número de órdenes pendiente disminuye, es decir cuando se reciben menos nuevas órdenes de las que se están atendiendo, se estabiliza en el valor de 1 día siempre y cuando el número de órdenes pendiente es inferior a la capacidad de producción, y crece cuando el número de órdenes pendiente aumenta.

Bajo la hipótesis 2 se observa el mismo comportamiento durante aproximadamente los 30 primeros días, puesto hasta ese momento no se produce la situación (el plazo de entrega supera los 5 días) que distingue a la política de inversión. Pero como esta política de inversión no es

los 5 días) que distingue a la política de inversión. Pero como esta política de inversión no es inmediata resulta que el plazo de entrega sigue creciendo y provoca ciertos altibajos en la demanda que a su vez hacen disminuir el plazo de entrega y que se pueda recuperar la situación con la inversión realizada anteriormente.

En cambio, bajo la hipótesis 3, como la política de inversión es inmediata, se consigue que no haya descontento en los clientes y por tanto que la demanda tenga un crecimiento sostenido.

Como conclusiones:

- 1) Se ha podido reproducir la intermitencia de periodos de crecimiento y de crisis en empresas especializadas en la fabricación de un determinado producto que no son capaces de adaptarse al mercado potencial.
- 2) Se ha comprobado que la intermitencia sólo se puede evitar con una buena política de inversiones, cuando se toma en la dirección adecuada y con el menor retraso posible. Y que se puede conseguir un crecimiento sostenido en la producción cuando la política de inversión es inmediata.
- 3) Aunque el modelo no es totalmente realista pues en algún momento empezarán a aparecer otros factores no considerados en el modelo. Por ejemplo que la demanda estará limitada porque el número de clientes es finito. Es de esperar que la política de inversiones también dará buenos frutos en esta situación.



### Modelo “Población de ballenas”

El modelo que se presenta en este ejercicio fue propuesto en 1978 por Jeffers para analizar hasta que punto se podía explotar una población de ballenas sin que la especie desapareciera. Pero se puede utilizar para modelar cualquier explotación ganadera o piscifactoría con el ajuste oportuno de parámetros. En el modelo se hacen las siguientes hipótesis:

- Para simplificar la simulación, se considera únicamente la población de ballenas hembras y dentro de ésta tres grupos (jóvenes, adultas y viejas), basado en el supuesto de que la proporción machos/hembras es constante a lo largo de los años y es la misma en todos los grupos y por tanto en la población total de ballenas.
- Las ballenas jóvenes alcanzan la madurez aproximadamente a los 5 ó 6 años de edad, y la expectativa de vida natural es de aproximadamente 50 años. De manera que los tres grupos en los que se clasifican las ballenas corresponden a: ballenas jóvenes = ballenas con edad comprendida entre 0 y 4 años, ballenas adultas = ballenas con edad comprendida entre 5 y 12 años, y ballenas viejas = ballenas con edad comprendida entre 13 y 50 años.
- En ausencia de explotación, la tasa de supervivencia anual para la población es de aproximadamente el 89% en los 12 primeros años y del 82% en los siguientes.
- Las ballenas jóvenes no tienen capacidad para procrear, pero sí las adultas y las viejas con unas tasas de fecundidad anual del 20.5% y del 22.5% respectivamente sobre la población que forma su grupo.
- Cada año madura el 25% de la población de ballenas jóvenes.
- Cada año envejece el 12.5% de la población de ballenas adultas.
- Los tres grupos de población están expuestos a la misma explotación (sacrificio) y ésta se realiza con un factor de proporcionalidad F.

a) Justificar que con las hipótesis anteriores, se pueden establecer las siguientes ecuaciones para las variaciones de población en los tres grupos de ballenas

$$\frac{d \text{ juvenes}(t)}{dt} = 0.205 \text{ adultas}(t) + 0.225 \text{ viejas}(t) - (0.25 + 0.11 + F) \text{ juvenes}(t)$$

$$\frac{d \text{ adultas}(t)}{dt} = 0.25 \text{ juvenes}(t) - (0.125 + 0.11 + F) \text{ adultas}(t)$$

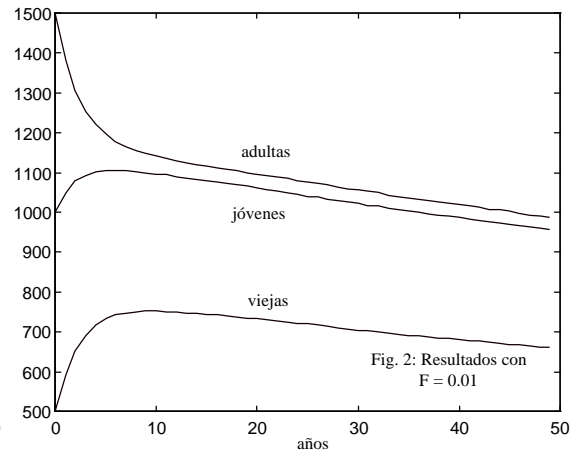
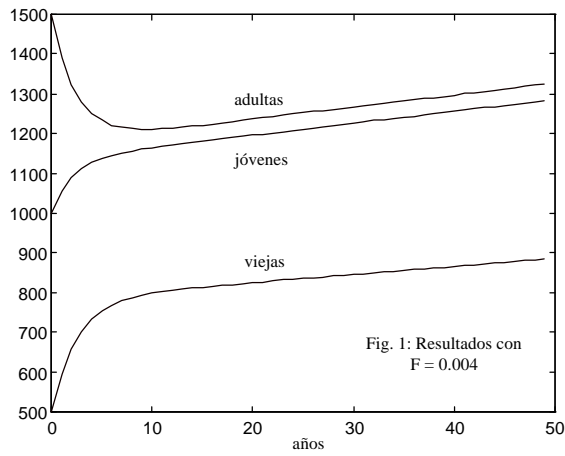
$$\frac{d \text{ viejas}(t)}{dt} = 0.125 \text{ adultas}(t) - (0.18 + F) \text{ viejas}(t)$$

b) Expresar mediante el correspondiente diagrama de Forrester las tres ecuaciones que definen el modelo. Indicar de forma clara la nomenclatura utilizada para las variables.

c) Comprobar, simulando al menos los diez primeros años, a partir de una población inicial de 1000 ballenas jóvenes, 1500 adultas y 500 viejas, que si el factor de explotación  $F = 0.004$  todos los grupos presentan un crecimiento mantenido de población (véase resultados de la figura 1), mientras que si  $F = 0.01$  todos los grupos presentan un decrecimiento mantenido de población y por tanto desaparecerán con los años (véase resultados de la figura 2). Observación: en todos los grupos de población se ha redondeado al menor número entero durante la simulación y se ha utilizado un paso de integración de 1 año.

d) En función de los resultados de las figuras 1 y 2 es lógico esperar que existe un factor de explotación F para el que, independientemente de las poblaciones iniciales, se alcanza un

equilibrio (estado estacionario) en los tres grupos de población. ¿Sabría usted indicar un procedimiento analítico para encontrar este valor de  $F$ ?



### Modelo “Volterra-1”

El modelo que se presenta, conocido como Volterra-1, estudia la evolución de dos especies que se disputan un mismo alimento, con la suposición de que este alimento es inagotable. La descripción de Volterra se basa en el siguiente razonamiento: con alimento en cantidad suficiente para satisfacer completamente la voracidad de los individuos, una especie aislada tendrá un coeficiente de crecimiento positivo que se puede suponer constante, sin embargo si un mismo alimento debe ser compartido por dos especies, entonces el coeficiente de crecimiento será positivo pero deberá disminuir si el número de individuos de cualquiera de las especies aumenta.

Considerando las siguientes variables:

- N1, número de individuos de la clase 1
- N2, número de individuos de la clase 2
- TC1, tasa de crecimiento vegetativo de la clase 1
- TC2, tasa de crecimiento vegetativo de la clase 2
- E1, tasa máxima de crecimiento vegetativo de la clase 1
- E2, tasa máxima de crecimiento vegetativo de la clase 2
- CN1, crecimiento vegetativo de la clase 1
- CN2, crecimiento vegetativo de la clase 2
- FN1N2, función correctora de las tasas de crecimiento vegetativo
- G1 y G2, parámetros de la función FN1N2
- L1, necesidades alimenticias de la clase 1
- L2, necesidades alimenticias de la clase 2

Las ecuaciones que definen el modelo son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 FN1N2(t) &= G1 N1(t) + G2 N2(t) \\
 TC1(t) &= E1 - L1 FN1N2(t) \\
 TC2(t) &= E2 - L2 FN1N2(t) \\
 CN1(t) &= TC1(t) N1(t) \\
 CN2(t) &= TC2(t) N2(t) \\
 \frac{d N1(t)}{dt} &= CN1(t) \\
 \frac{d N2(t)}{dt} &= CN2(t)
 \end{aligned}$$

a) Basándose en las ecuaciones del modelo, dibujar su diagrama causal.

b) Dibujar el diagrama de Forrester asociado.

c) Simulando al menos diez unidades de tiempo con:

- Número inicial de individuos de la clase 1,  $N1(0)=10$ .
- Número inicial de individuos de la clase 2,  $N2(0)=10$ .
- Y los siguientes parámetros;

$$E1=1, E2=1.25, G1=0.1, G2=0.2, L1 =0.0050, L2=0.0075, \Delta t=1$$

Comprobar que la especie 2, después de un crecimiento inicial superior a la especie 1, tiende a desaparecer y que la especie 1 crece hasta un valor en el que se mantiene constante al desaparecer la especie 2, como se muestra en la figura. Observación: los valores de  $N_1$  y  $N_2$  deben ser enteros.

